Una descripció de la forma canònica de Jordan per a endomorfismes triangularitzables

Joan-Josep Climent Coloma

Sigui V un espai vectorial de dimensió finita sobre un cos K, $f \in \mathrm{End}_K(V)$, i $\mathcal{B}$ una base de V. Suposem que $A := M_{\mathcal{B}}(f)$ és una matriu triangular.[1]

Definició. Anomenem bloc de Jordan d'ordre p per al valor propi λ a la matriu quadrada d'ordre p següent:

$$\text{Si } p = 1, \text{ aleshores } \quad (\,\lambda\,)\,.$$

$$\text{Si } p > 1, \text{ aleshores } \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

El teorema de Jordan ens permet afirmar que la matriu A és semblant a una matriu quasi diagonal:

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_r \end{pmatrix}$$

on J_i és un bloc de Jordan per a $i = 1, 2, \dots, r$.

Siguin $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ els diferents valors propis d'A amb multiplicitats respectives $m_1, m_2, \dots, m_k$.

Sigui $g_j \in \mathrm{End}_K(V)$ tal que $M_{\mathcal{B}}(g_j) := (A - \lambda_j I)^{m_j}$, i $V_j := \ker(g_j)$, $j = 1, 2, \dots, k$.

[1] El resultat que presentem en aquest treball és vàlid encara que A no sigui triangular, si suposem que K es un cos algebràicament tancat, ja que en tal cas, qualsevol endomorfisme de V és triangularitzable.

Sabem que $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_k$, a més, sabem que A es semblant a una matriu quasi-diagonal

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A_k \end{pmatrix}$$

sent $A_j \, (j = 1, 2, \cdots, k)$ una matriu quadrada d'ordre m_j, el polinomi característic de la qual és $(-1)^{m_j}(\lambda - \lambda_j)^{m_j}$.

Ens dedicarem a exposar quants blocs de Jordan hi ha per al valor propi λ_1, així com l'ordre d'aquests blocs, ja que pot seguir-se un raonament semblant per a la resta de valors propis.

Definició. Direm que els vectors $v_1, v_2, \ldots, v_p \in V$ formen un conjunt bàsic per al valor propi λ_1, si $v_1 \neq 0$, $f(v_1) = \lambda_1 v_1$; $f(v_2) = \lambda_1 v_2 + v_1$; $\ldots$; $f(v_p) = \lambda_1 v_p + v_{p-1}$.

A V_1 trobem una base formada per conjunts bàsics de la següent forma:

Si $h_1 := (f - \lambda_1 \, \mathrm{id}_V)|_{V_1}$ aleshores és obvi que h_1 és un endomorfisme nilpotent de V_1.

Distingirem dos casos:

(a) $h_1 = 0$.

Aleshores A_1 està formada per m_1 blocs de Jordan per al valor propi λ_1, essent aquests blocs d'ordre 1, ja que qualsevol base de V_1 pot considerar-se com una base formada per conjunts bàsics unitaris.

(b) $h_1 \neq 0$.

Si $m \leq m_1$ és l'índex de nilpotència de h_1, aleshores $V_1 = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_m$ essent $W_q \; (q = 1, 2, \cdots, m)$ subespais vectorials de V_1 de forma que $h_1|_{W_q} : W_q \longrightarrow W_{q-1}$, és un monomorfisme per a $q = 2, 3, \cdots, m$.

A més, els W_q s'obtenen de forma que $\ker(h_1^q) = \ker(h_1^{q-1}) \oplus W_q$, $q = 1, 2, \cdots, m$. Obviament $\ker(h_1^m) = V_1$ i $\ker(h_1^0) = \{0\}$.

Considerem una base de V_1 formada per bases de W_q, $q = 1, 2, \cdots, m$ de la següent forma:

Sigui $\{e_{mi} | i = 1, 2, \ldots, p_m\}$ una base de W_m i definim $h_1(e_{mi}) := e_{(m-1)i}$, $i = 1, 2, \ldots, p_m$. Com que $\{e_{(m-1)i} | i = 1, 2, \ldots, p_m\}$ és un sistema lliure de vectors de W_{m-1}, pot completar-se fins obtenir una base $\{e_{(m-1)i} | i = 1, 2, \ldots, p_m, \ldots, p_{(m-1)i}\}$ de W_{m-1}.

Si seguim amb aquest raonament, podem obtenir una base $\{e_{2i}|i = 1,2,\ldots,p_m,\ldots,p_{(m-1)},\ldots,\ldots,p_2\}$ de W_2. Si ara definim $h_1(e_{2i}) := e_{1i}$, $i = 1,2,\ldots,p_2$, per ser $\{e_{1i}|i = 1,2,\cdots,p_2\}$ un sistema lliure en W_1, podem completar-lo fins obtenir una base $\{e_{1i}|i = 1,2,\ldots,p_2,\ldots,p_1\}$ de W_1.

Per ser $W_1 = \ker(h_1)$, tenim que $h_1(e_{1i}) = 0, i = 1,2,\ldots,p_1$,

Els vectors:

$$
\begin{array}{l}
e_{m1},\, e_{m2},\, \ldots\ldots,\, e_{mp_m} \;; \\
e_{(m-1)1},\, e_{(m-1)2},\cdots,\, e_{(m-1)p_m},\cdots,\, e_{(m-1)p_{(m-1)}} \;; \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
e_{11},\, e_{12},\, \ldots\ldots,\, e_{1p_m},\, \ldots,\, e_{1p_{(m-1)}},\, \ldots,\, e_{1p_1} \;;
\end{array}
$$

formen una base de V_1 que pot distribuir-se en una família de conjunts bàsics de la següent forma:

Si $1 \leq i \leq p_m$, tenim les relacions:

$$
\begin{array}{lcl}
h_1(e_{1i}) = 0 & \Longrightarrow & f(e_{1i}) = \lambda_1 e_{1i} \;, \\
h_1(e_{2i}) = e_{1i} & \Longrightarrow & f(e_{2i}) = \lambda_1 e_{2i} + e_{1i} \;, \\
\ldots & & \ldots \qquad \ldots \\
h_1(e_{mi}) = e_{(m-1)i} & \Longrightarrow & f(e_{mi}) = \lambda_1 e_{mi} + e_{(m-1)i} \;,
\end{array}
$$

per tant, per a cada i, $\{e_{1i}, e_{2i}, \ldots, e_{mi}\}$ és un conjunt bàsic per al valor propi λ_1.

Anàlogament, si $p_m < i \leq p_{(m-1)}$, tenim

$$
\begin{array}{lcl}
h_1(e_{1i}) = 0 & \Longrightarrow & f(e_{1i}) = \lambda_1 e_{1i} \;, \\
h_1(e_{2i}) = e_{1i} & \Longrightarrow & f(e_{2i}) = \lambda_1 e_{2i} + e_{1i} \;, \\
\ldots & & \ldots \qquad \ldots \\
h_1(e_{(m-1)i}) = e_{(m-2)i} & \Longrightarrow & f(e_{(m-1)i}) = \lambda_1 e_{(m-1)i} + e_{(m-2)i} \;,
\end{array}
$$

i així, per a cada i, $\{e_{1i}, e_{2i}, \ldots, e_{(m-1)i}\}$ és un conjunt bàsic per al valor propi λ_1.

Seguint d'aquesta forma, s'obté la distribució desitjada.

Posat que cada conjunt bàsic proporciona un bloc de Jordan, podem afirmar que el nombre de blocs de Jordan per al valor propi λ_1 és $\dim W_1$. Aquest blocs es distribuixen de la forma següent:

$$
\begin{array}{llll}
\text{D'ordre} & m & \text{hi han} & \dim W_1 \text{ blocs,} \\
\text{D'ordre} & m-1 & \text{n'hi han} & \dim W_{m-1} - \dim W_{m-2} \;, \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\text{D'ordre} & 2 & \text{n'hi han} & \dim W_2 - \dim W_3, \\
\text{D'ordre} & 1 & \text{n'hi han} & \dim W_1 - \dim W_2.
\end{array}
$$

Com $\dim W_q = \dim\ker(h_1^q) - \dim\ker(h_1^{q-1})$, $q = 1,2,\ldots,m$ i $\ker h_1^q = \ker(f - \lambda_1 \mathrm{id}_V)^q$ tenim que $\dim\ker(h_1^q) = n - \mathrm{rg}(A - \lambda_1 I)^q$. Així, si $q = 1,2,\ldots,m$, tenim que $\dim W_q = \mathrm{rg}(A - \lambda_1 I)^{q-1} - \mathrm{rg}(A - \lambda_1 I)^q$, per tant, si

$q = 1, 2, \ldots, m-1, \dim W_q - \dim W_{q+1} = \text{rg}(A - \lambda_1 I)^{q-1} - 2\text{rg}(A - \lambda_1 I)^q + \text{rg}(A - \lambda_1 I)^{q+1}$.

En conseqüència el nombre de blocs de Jordan per al valor propi λ_1, ve donat per $\dim W_1 = n - \text{rg}(A - \lambda_1 I)$, distribuint-se aquest blocs de la manera següent:

$$
\begin{array}{llll}
\text{D'ordre} & m & \text{n'hi han} & \text{rg}(A-\lambda_1 I)^{m-1} - \text{rg}(A-\lambda_1 I)^m. \\
\text{"} & m-1 & \text{"} & \text{rg}(A-\lambda_1 I)^{m-2} - 2\text{rg}(A-\lambda_1 I)^{m-1} + \text{rg}(A-\lambda_1 I)^m. \\
\text{"} & m-2 & \text{"} & \text{rg}(A-\lambda_1 I)^{m-3} - 2\text{rg}(A-\lambda_1 I)^{m-2} + \text{rg}(A-\lambda_1 I)^{m-1}. \\
\vdots & \vdots & \vdots & \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\text{"} & 2 & \text{"} & \text{rg}(A-\lambda_1 I) - 2\text{rg}(A-\lambda_1 I)^2 + \text{rg}(A-\lambda_1 I)^3. \\
\text{"} & 1 & \text{"} & n - 2\text{rg}(A-\lambda_1 I) + \text{rg}(A-\lambda_I)^2.
\end{array}
$$

Per tant podem dir que la matriu A_1, formada per tots els blocs de Jordan per al valor propi λ_1, té tots els elements de la diagonal principal iguals a λ_1, i tots els elements de les posicions $(i, i+1)$ $i = 1, 2, \ldots m_1 - 1$, són iguals a 1, si aquest element forma part d'un bloc de Jordan i zero en un altre cas. La resta d'elements són tots zeros.

Finalment, si no estem interessats en conèixer quina és la distribució en blocs de Jordan, reordenant la base obtinguda abans, podem col·locar tots els zeros que apareixen en algunes posicions $(i, i+1)$ un a continuació de l'altre; d'aquesta forma els elements d'A_1 poden distribuir-se de la següent forma:

(a) Els elements de la diagonal principal són tots iguals a λ_1.

(b) Els elements que ocupen les posicions $(i, i+1)$, $i = 1, 2, \ldots, m_1 - 1$, són 0 o 1, essent el nombre de zeros una unitat inferior al nombre de blocs de Jordan d'aquest valor propi, és a dir $n - \text{rg}(A - \lambda_1 I) - 1$.

(c) La resta d'elements són tots iguals a zero.

Referències

[1] I. N. Herstein, *Topics in Algebra*, Blaisdell Publishing Company, 1964.

[2] K. Hoffman and R. Kunze, *Linear Algebra*, Prentice-Hall, 1971.

Departament de Matemàtica Aplicada
Universitat Politècnica de València
Escola Universitària d'Informàtica d'Alacant