Huygens, Newton, i el radi de curvatura

Marianna Bosch i Casabò

> *«Els punts decisius de la Història no apareixen quasi mai d'una manera repentina i espontània, inesperada, sino que solen ser senzillament les formulacions més clares i precises que culminen un camí llarg i espinós de desenvolupaments irregulars.»*
>
> CARL B. BOYER, *Història de la Matemàtica.*

Introducció

No sabem amb precisió com sorgeix en la història de les matemàtiques la noció de curvatura. Segons explica J. L. Coolidge en l'article «The unsatisfactory story of curvature», no apareix en la geometria clàssica cap caracterització de les corbes planes a partir del seu grau de curvatura. Cal esperar fins al segle XIV en què N. Oresme definirà la noció de «curvitas»: si dues corbes toquen la mateixa línea en un mateix punt i per un mateix costat, la mes petita tindrà curvatura més gran; un cercle tindrà curvatura uniforme, inversament proporcional al seu radi. Es desconeix però com arriva Oresme a aquest resultat; i fins tres-cents anys més tard, en estudiar Kepler el problema de Alhazen,* no es relacionarà la curvatura d'una corba amb la d'un cercle: el cercle de curvatura.

Estem encara molt lluny però d'una definició que relacioni la noció de curvatura amb la intersecció de dues normals a la corba infinitament properes, i que faci aparèixer el radi i el centre de curvatura.

En el segle XVII, C. Huygens, treballant sobre corbes evolutes en el seu tractat de *Horologium Oscillatorium,* dóna una construcció purament geomètrica del radi de curvatura. Això li permet determinar la desenvolupant de qualsevol corba geomètrica, però no menciona per a res aquest concepte. Poc més tard (o potser simultàniament), I. Newton aborda la qüestió amb tot detall, definint el concepte de grau i

* El problema de Alhazen (nom llatí de Ibn Al-Haithan (965-1039)) consisteix en determinar el punt d'un mirall convex on s'ha de reflectir la llum provinent d'un focus lluminós per incidir en l'ull d'un observador.

cercle de curvatura fins a obtenir a fórmula ara ja clàssica del radi de curvatura $R = \frac{(1 + \dot{y}^2)^{3/2}}{\ddot{y}}$ gràcies a la nova Teoria de les Fluxions.

D'aquesta manera s'aconsegueix, com diu Coolidge, «tancar la qüestió d'una manera que avui qualificaríem de totalment satisfactòria».

Examinarem el treball d'aquests dos autors amb un doble propòsit: esbrinar com aconsegueix Huygens, amb mètodes exclusivament geomètrics, determinar una longitud que involucra derivades de primer i segon ordre i veure com va utilitzar Newton la nova eina del càlcul diferencial per resoldre el problema de la definició del radi de curvatura, a partir d'una construcció geomètrica molt semblant a la de Huygens.

L'*Horologium Oscillatorium* de Huygens i la teoria de l'evolució de les corbes

L'*Horologium Oscillatorium*, publicat l'any 1673, és una de les obres mestres de Christiaan Huygens. Aquest tractat no està només dedicat a la invenció i descripció d'una millora mitjançant un moviment cicloïdal del rellotge de pèndol, que l'autor va idear l'any 1656. Huygens també hi exposa resultats molt importants com a base teòrica de l'obra, en particular una nova teoria: la de les corbes evolutes. Com ell mateix diu en la introducció, «aquestes coses estan tan íntimament lligades a la perfecció d'aquesta invenció que les podem considerar com la part principal i, per dirho així, el fonament de tot aquest mecanisme».

El seu tractat es compon d'una primera part destinada al mecanisme del rellotge, d'una segona sobre la caiguda dels cossos pesants i el seu moviment en una cicloide, d'una tercera part dedicada a l'evolució i dimensió de les línies corbes, i d'una quarta i cinquena parts sobre el centre d'oscil·lació i els teoremes de la força centrífuga, amb una versió alternativa del rellotge on el pèndol descriu un moviment circular horitzontal en lloc de cicloïdal en un pla vertical.

En la segona part del llibre, Huygens demostra que la cicloide és una corba realment tautòcrona: un cos abandonat en un arc de cicloide tardarà el mateix temps en lliscar fins el punt més baix, sigui quin sigui el punt de partida del moviment. Així si el pèndol d'un rellotge descriu en oscil·lar un arc de cicloide, les oscil·lacions s'executaran en temps iguals, independentment de l'amplitud del moviment.

Com construir un pèndol amb aquesta propietat? Com fer que un pèndol oscil·li seguint un arc cicloïdal en lloc de circular?

Aquest problema porta Huygens a estudiar, en la tercera part, la teoria de les corbes evolutes, que parteix de la idea següent: Considerem una corba còncava *ABC* a la qual s'ha enrotllat un fil o línia flexible començant pel punt *A*. Aquest fil es deslliga a partir del punt *B* de tal forma que la part lliure sempre està estirada. Fent això per a cada punt de la corba, l'extrem lliure del fil descriu una altra corba *A'B'C* dita «développée» (desenvolupada); la corba sobre la qual el fil està enrotllat és la «développante» (desenvolupant).

El problema que es planteja Huygens és doncs el de determinar la corba desenvolupant de la cicloide, i això el porta a estudiar les relacions existents entre una corba i la seva desenvolupada.

En la primera proposició d'aquesta part, Huygens demostra que tota tangent a la desenvolupada és normal a la desenvolupant. Després prova que si prenem sobre una corba còncava dos punts A i B suficientment pròxims, llavors la raó AB/AN és més gran que qualsevol raó prefixada, on N és el punt d'intersecció de la normal en B amb la tangent en A. Aquest resultat li permet demostrar que dues corbes còncaves amb un punt en comú no poden tenir les mateixes normals en cada punt. Conseqüència: si en aquesta situació les corbes són tals que les normals a l'una són tangents a l'altra, llavors la primera és la desenvolupada de la segona.

A partir d'aquí, Huygens ja està en condicions de demostrar que la desenvolupant d'una semi-cicloide és una altra semi-cicloide semblant a la primera. Així doncs, basta situar el pèndol del rellotge entre dues làmines de cicloide per obtenir la isocronia del moviment.

Sense acontentar-se amb aquest descobriment, Huygens prosseguirà amb l'estudi de les corbes evolutes, en discernir l'aplicació de la nova teoria a problemes de rectificació de corbes, i «per la bellesa i novetat aparents d'aquesta teoria». Arriba fins a la PROPOSICIÓ XI, l'última d'aquesta part, on demostra que tota corba geomètrica còncava té una evoluta o desenvolupada.

Tractarem amb detall aquesta proposició perquè la desenvolupada és la corba descrita pels centres de curvatura de la desenvolupant, i doncs Huygens ens donarà implícitament un mètode per trobar el radi de curvatura de qualsevol arc de corba còncau donat.

PROPOSICIÓ XI: Donada una línea corba, corbada cap a un sol costat, trobar-ne una altra, l'evolució de la qual descrigui la primera; i demostrar que tota corba geomètrica prové d'una corba igualment geomètrica i a més rectificable.

La demostració que dóna Huygens és la següent:

Considerem una corba còncava ABF i suposem coneguda CDE, corba per l'evolució de la qual ABF és descrita. (Així ABF és la desenvolupant i CDE la desenvolupada).

Sabem que les tangents a CDE són normals a ABF i, recíprocament, si prenem (BD) i (FE) normals a ABF, també seran tangents a CDE.

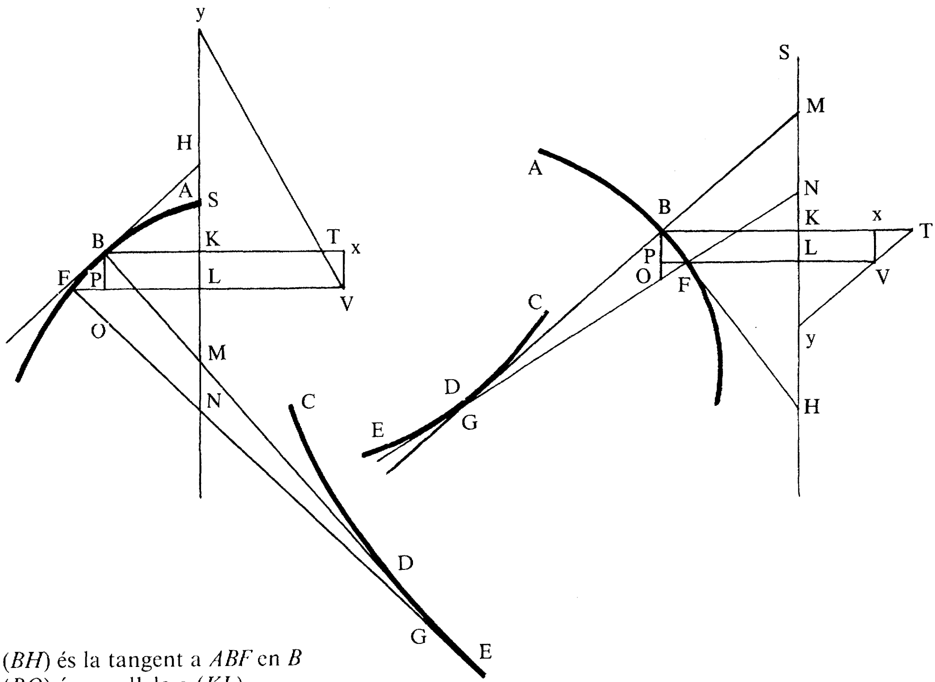
Considerem B i F molt propers l'un de l'altre.

Com que ABF és còncava, (BD) i (FE) es tallen en un punt G.

Com que l'evolució comença per hipòtesi en el punt A i que F és més allunyat de A que B, E estarà igualment més lluny de A que D, i G caurà més enllà de D sobre la recta (BD).

Com més pròxim sigui F de B, més pròxims seran D, E i G.

I doncs, si considerem l'interval BF infinitament petit, podem suposar que D, G i E són un mateix punt.



(BH) és la tangent a ABF en B
(BO) és paral·lela a (KL)
(BK) i (FL) són perpendiculars a (KL)
(BD) i (FE) tallen (KL) en M i N respectivament

A més, també podem suposar que (BH), tangent a ABF en B, és tangent a la corba en F (i.e., B, H i F alineats).

En aquesta situació, seguint les notacions de la figura, tenim:

$$\frac{BG}{MG} = \frac{BO}{MN} = \frac{BO}{BP} \times \frac{BP}{MN} = \frac{BO}{BP} \times \frac{KL}{MN}$$

Així, si trobem les dues raons $\frac{BO}{BP}$ i $\frac{KL}{MN}$, obtindrem $\frac{BG}{MG}$. I com que BM està determinat en longitud i posició (és la intersecció de la normal (BM) amb l'eix (KL)), trobarem la posició del punt G.

Ara, com diu Huygens, «veurem que aquestes dues raons vénen donades en totes les corbes geomètriques i que per tant sempre els podem assignar corbes per l'evolució de les quals poden ser descrites i que són per consegüent rectificables.»

(Notem que BG és el radi de curvatura de la corba ABF.)

Per trobar $\frac{BO}{BP}$, Huygens construeix una tangent a la corba ABF en el punt F, prenent FN perpendicular a FH. Obté així les longituds NH i HL, i doncs $\frac{HN}{HL} = \frac{BO}{BP}$.

Com determinar la raó $\frac{KL}{MN}$?

Aquesta raó és la que, passant al càlcul diferencial, farà aparèixer en la fórmula del radi de curvatura una expressió amb derivades de segon ordre. La construcció serà doncs bastant més complexa que l'anterior, ja que caldrà fer intervenir una corba auxiliar que permeti representar la variació de les subnormals a ABF: (LN) i (KM).

La construcció és la següent:

Prenem (KT) i (LV) perpendiculars a (KL), on T, V i X són tals que $KT = KM$, $LV = LN$ i (VX) és paral·lela a (LN) tallant (KT) en X. (Vegi's la figura.)

Tenim que $XT = LV - KT = LN - KM = NM - KL$, $XV = LK$ i $NM = VX + XT$ (o $VX - XT$). Així, si coneixem $\frac{VX}{TX}$, podrem trobar $\frac{VX}{VX + XT} = \frac{KL}{MN}$.

Com que $KT = KM$ i $LV = LN$, T i V descriuen una línea recta o corba donada. Si és recta (per exemple si ABF és una cònica), llavors $\frac{VX}{XT}$ ve donat (és la pendent de la recta), i és independent de l'interval KL que considerem.

Si és corba, la raó $\frac{VX}{XT}$ serà diferent segons que KL sigui més gran o més petit. Però com que estem suposant que B i F són molt pròxims l'un de l'altre, KL serà infinitament petit. De la mateixa manera, cal pensar que T i V intercepten una part absolutament mínima de la corba, i doncs podem considerar que la recta VT coincideix amb la tangent TY. Com que la corba descrita per T i V és geomètrica, podem construir la tangent (TY). Així, $\frac{YT}{XT}$ serà donat, i $\frac{VX}{XT}$ també.

I això demostra la proposició.

A continuació, Huygens explicita un mètode per trobar la corba TV analíticament, prenent un punt S sobre KL que servirà de centre de coordenades i posant $x = SK$ i $y = KT$ (coordenades del punt T).

Pel mètode de les tangents de Descartes, obté KM, que iguala a KT (o a y), i això li dóna l'equació de la corba TV, a la qual només cal construir la tangent (TY).

La tercera part de l'*Horologium Oscillatorium* s'acaba amb algunes aplicacions d'aquesta proposició a la rectificació de corbes geomètriques concretes, com les paràboles i les hipèrboles. En aquests casos, Huygens explicita BD (que és de fet el radi de curvatura BG) en funció de BM i SZ (on Z és la intersecció de (BM) amb (SZ) perpendicular a (SK)), i troba les equacions de les desenvolupants de les corbes considerades.

Veiem ara com, passant la demostració de Huygens al càlcul diferencial i seguint els mateixos passos que ell, obtenim efectivament la fòrmula clàssica del radi de curvatura.

Considerem els eixos coordenats (SK) i (SZ), de manera que $B = (x, y)$, on $y = y(x)$ és l'equació de la corba ABF.

Tenim $BK = y$.

$FL = y + \Delta y$, si prenem $F = (x + \Delta x, y + \Delta y)$

$KM = y\frac{\Delta y}{\Delta x}$, subnormal a la corba en B

$BP = \Delta x$ i $FP = \Delta y$

El primer pas de la demostració de Huygens era la determinació de $\frac{BO}{BP}$, per la construcció de la tangent (BH). En la notació moderna:

$$\frac{BO}{BP} = \frac{BP + PO}{BP} = 1 + \frac{BO + BP}{BP^2} = 1 + \left(\frac{FP}{BP}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2$$

El segon pas era trobar $\frac{KL}{MN}$: tenim que $LK - NM = LN - KM = \Delta$ subnormal $= XT$, per construcció.

Així, com $VX = KL = x$, $\frac{VX}{XT} = \frac{KL}{LN - KM} = \frac{\Delta x}{\Delta \text{ subnormal}}$. La pendent de la tangent a la corba auxiliar TV representa geomètricament la derivada de la subnormal: $\frac{d}{dx}\left(y\frac{dy}{dx}\right) = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\frac{d^2y}{dx^2}$.

Ara, $\frac{KL}{MN} = \frac{VX}{VX + XT} = \frac{1}{1 + \frac{\Delta \text{ subnormal}}{\Delta x}}$.

Transcrivint-ho tot al resultat inicial $\frac{BG}{MG} = \frac{BO}{BP} \times \frac{KL}{MN}$, queda:

$$\frac{BG}{MG} = \frac{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}{1 + \frac{\Delta \text{sub.}}{\Delta x}},$$

i passant al límit:

$$\lim \frac{BG}{MG} = \frac{1 + (dy/dx)^2}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\frac{d^2y}{dx^2}}$$

d'on $\lim \frac{BG}{MG} = \lim \frac{BG}{BG - MG} = \frac{1 + (dy/dx)^2}{-y\frac{d^2y}{dx^2}}$

En substituir la normal BM pel seu valor $y\sqrt{1 + (dy/dx)^2}$, resulta que:

$$BG = \frac{(1 + dy/dx)^{3/2}}{d^2y/dx^2}, \text{ radi de curvatura.}$$

Fins l'any 1693 Huygens no es va interessar pels nous mètodes del càlcul infinitesimal. Com afirma L. Figuier a *Vie des savants illustres du XVIIème siècle,* «En els seus treballs matemàtics, Huygens s'havia acontentat amb utilitzar els mètodes analítics dels antics, i no tenia cap motiu per considerar-los insuficients ja que li havien proporcionat totes les solucions que els va demanar. Però Newton, que recorria en el món de la ciència espais més amplis, s'havia trobat amb problemes que li semblaven massa difícils o fins i tot impossibles de resoldre pels mitjans coneguts aleshores. I això el va conduir a buscar i trobar un nou mètode d'anàlisi matemàtica, el mètode del càlcul dit "de fluxions".»

El problema V del mètode de fluxions de Newton

L'any 1736 surt publicat el *Mètode de Fluxions i Sèries Infinites* de I. Newton, després de la mort del seu autor, obra que segons sembla va ser escrita entre 1664 i 1671. En ella, Newton dedica tot un capítol, el problema V, a «trobar la quantitat de curvatura d'una corba donada a un punt donat qualsevol», ja que considera que «hi ha pocs problemes sobre les corbes que siguin més elegants que aquest i que deixin més clara la seva natura».

Newton comença aquest apartat amb les consideracions generals següents:

1. Un cercle té grau de curvatura constant i aquest és recíprocament proporcional al seu diàmetre.
2. Una corba té en un punt el mateix grau de curvatura que el del cercle tangent de més gran contacte a la corba en aquest punt (on per més gran contacte entenem que no podem fer passar cap altre cercle tangent entre el primer i la corba).
3. El centre de curvatura d'un punt d'una corba és el centre del cercle descrit a 2), i doncs la normal a la corba en aquest punt passa pel centre d'aquest cercle.
4. La proporció de curvatura de diferents punts es trobarà per la proporció de curvatura dels cercles de mateixa curvatura; o per la raó recíproca dels radis de curvatura.

S'enuncien després les principals propietats del centre de curvatura, que apareix com la intersecció de dues perpendiculars a la corba infinitament properes, o com el centre del cercle de més gran contacte, i encara com el Centre del Moviment, és a dir el punt que menys es mou d'una normal que recorre la corba.

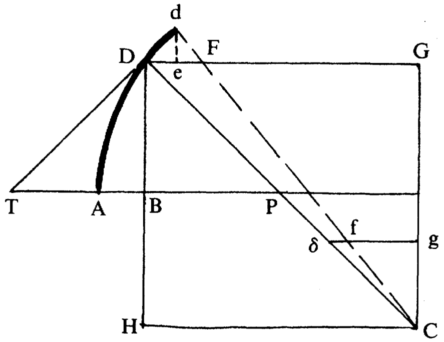
A fi de determinar el centre de curvatura d'una corba en un punt donat, Newton utilitza la primera de les propietats enunciades, que és la que li proporciona el mètode més senzill de resolució. Com explica Coolidge en l'article «The unsatisfactory story of curvature»: «Newton suposa, com ho fa Huygens, que si un punt no d'inflexió està fixat en una corba i si un segon punt s'hi apropa per un costat, la intersecció de les normals s'acosta a una determinada posició límit, centre del cercle de mateixa curvatura, i cap altre cercle tangent no pot passar entre aquest i la corba... Newton busca la intersecció de dues normals molt properes, i si prenem x com a variable independent de tal forma que $\dot{x} = 1$ i $z = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$, demostra molt simplement que $R = \dfrac{(1+z^2)^{3/2}}{\dot{z}}$, on R és el radi de curvatura».

Veiem ara aquesta demostració, semblant a la de Huygens per la idea geomètrica en què es basa, però bastant més àgil que aquesta gràcies a la utilització de les fluxions:

Sigui:

(DT) la tangent a un punt qualsevol D d'una corba ADd
(DC) la normal a la corba en aquest punt
C el centre de curvatura de la corba en D
AB l'abscissa de D, i P la intersecció de (AB) i (DC)
(DG) paral·lela a (AB); i (CG) perpendicular a (AB)

Prenem Cg sobre CG de longitud qualsevol, i $\delta \in DC$ tal que $(g\delta) \perp (CD)$.



Tenim que (1) $\dfrac{Cg}{g\delta} = \dfrac{TB}{BD}$ perquè TDB i $Cg\delta$ són triangles semblants.

Suposem que D recorre sobre la corba un espai infinitament petit Dd. Llavors Cd serà la normal a la corba en el punt d i llavors tenim la igualtat (2) $DF = De + \dfrac{de \cdot de}{De}$.

Ara si trobem $\dfrac{DF}{\delta f}$, com $\dfrac{DF}{\delta f} = \dfrac{CG}{Cg}$, podrem determinar el punt C.

Posem $AB = x$, $BD = y$ (i.e., B centre de coordenades d'eixos (AB) i (BD)). Prenem $Cg = 1$ i $g\delta = z$.

Per (1), $z = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$ pendent de la tangent (TD).

Ara, $\delta f = \dot{z}\,o$, on o és una quantitat infinitament petita.* $De = \dot{x}\,o$ i $de = \dot{y}\,o$, moments de les coordenades.

Si substituim les expressions anterior a (2) obtenim:

$$DF = \dot{x}\,o + \frac{\dot{y}\dot{y}\,o}{\dot{x}}$$

* Newton considera el temps com la variable independent, i anomena $\dot{x}$ la fluxió de x (i.e., la velocitat). El producte $\dot{x} \cdot o$ correspondria a un element infinitessimal de x.

y llavors

$$\frac{1}{CG} = \frac{f}{DF} = \frac{\dot{z}o}{\dot{x}o + \frac{\dot{y}\dot{y}o}{\dot{x}}},$$

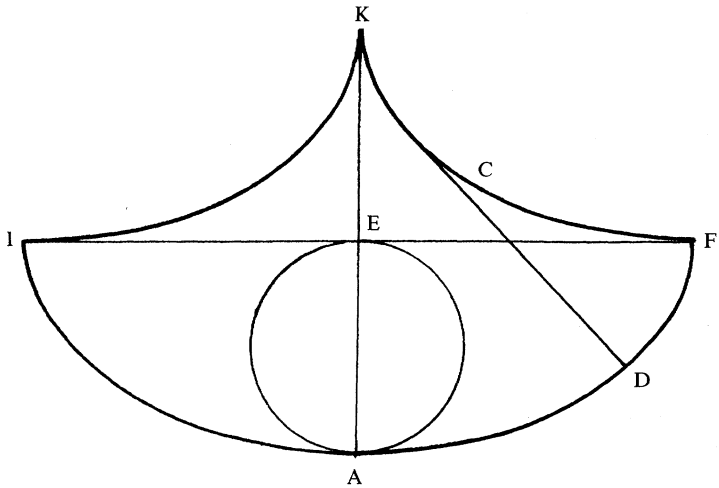
que ens dóna

$$CG = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\dot{z}}$$

Prenem ara $\dot{x} = 1$, per tenir $\dot{y} = z$ i $CG = \frac{1 + \dot{y}^2}{\ddot{y}}$, d'on deduïm $DG = \frac{\dot{y} + \dot{y}^3}{\ddot{y}}$ i finalment $DC = \frac{(1 + \dot{y}^2)^{3/2}}{\ddot{y}}$, radi de curvatura.

Tot seguit, Newton explicita la construcció geomètrica del punt C a partir dels resultats anteriors, i calcula el radi de curvatura d'algunes corbes concretes: la hipèrbola, l'el·lipse, la paràbola, la concoide, i en l'exemple 4 la cicloide. En aquest últim cas demostra que la corba descrita pels radis de curvatura és una altra cicloide semblant a la primera, arribant al mateix resultat que Huygens.

És interessant recalcar el corol·lari 4 d'aquesta part, on apareix un indici de la teoria de corbes desenvolupants de Huygens: «Si a la punta K de la cicloide superior suspenem a l'extrem d'un fil un pes a l'alçada KA o $2EA$, i mentre el pes oscil·la, el fil s'aplica sobre la cicloide KF i FI que li resisteix de cada costat i li impedeix d'estirar-se en línea recta de tal manera que la part inferior segueix la cicloide mentre que la inferior roman en línea recta, es veu que el pes es mourà en el perímetre de la cicloide inferior, perque el fil CD li serà sempre perpendicular».



Newton seguirà aquest capítol relacionant el radi de curvatura amb els angles de contacte i determinant la curvatura de corbes de diferents espècies (geomètriques i mecàniques). També proposarà nous mètodes de resolució del seu problema a partir del cercle de més gran contacte amb la corba, per acabar amb algunes «Qüestions relacionades amb el problema inicial», com ara trobar punts d'una corba amb grau de curvatura donat o be determinar la corba descrita pels centres de curvatura d'una corba donada (és a dir, la desenvolupada).

Ja podem parlar aquí de formalització del concepte de Radi de Curvatura, que Newton defineix i caracteritza abans d'explicitar-ne la fòrmula general i un mètode de construcció, aplicar-lo a casos concrets, per finalment ampliar els diferents tipus de problema que s'hi relacionen.

Comparació

Cal situar-se en el marc històric de l'evolució de la matemàtica del segle XVII per comprendre i comparar el treball referent al radi de curvatura de Huygens i Newton, dos personatges que, tot i haver viscut a la mateixa època i haver estat interessats pels mateixos tipus de problemes, es diferencien des del punt de vista de la matemàtica per trobar-se en dues etapes diferents d'aquesta ciència: l'abans i el després de la utilització del càlcul diferencial.

Els mètodes matemàtics emprats per Huygens en la teoria de les corbes evolutes són essencialment geomètrics i algèbrics, herència directa d'Arquimedes, Descartes i Fermat. En aquest aspecte, queden clarament emmarcats en la matemàtica precursora del càlcul diferencial. En la proposició XI que hem examinat, tots els raonaments que inclouen quantitats infinitèsimes es basen en propietats i construccions purament geomètriques. L'eina bàsica per demostrar l'existència de la corba desenvolupada (que inclou la determinació del centre de curvatura) és la geometria clàssica, en el sentit en que només intervenen magnituts i construccions geomètriques, i es deixa el càlcul amb coordenades al marge de la demostració. Aquest s'utilitza únicament per explicitar i caracteritzar corbes concretes, a manera d'il·lustració, per «aplicar» i poder obtenir efectivament la natura de les corbes buscades i els resultats que, segons diu el mateix Huygens, «hem trobat només raonant segons els mètodes de l'art».

La transgressió d'aquest «art» de la demostració matemàtica, és a dir, la incorporació del càlcul analític com a eina de demostració i de construcció geomètrica en la determinació del radi de curvatura, posa de manifest la potència del mètode de fluxions de Newton, en permetre la manipulació algèbrica de quantitats infinitèsimes. Així, gràcies a aquest nou càlcul amb coordenades, el «raonament» es desprèn de la figura, i llavors, la determinació d'una tangent o de la variació d'una normal esdevé una simple raó de fluxions o de fluxions de fluxions. Això fa que Newton pugui obtenir una fórmula general del radi de curvatura a partir de les coordenades dels punts d'una corba genèrica, mostrant per primer cop l'aplicació de derivades de segon ordre a un problema geomètric.

Així, la similitud aparent d'aquests dos treballs referents al radi de curvatura, el fet que els dos autors hagin partit d'una mateixa idea geomètrica i segueixin en les demostracions pràcticament les mateixes etapes (en la determinació de les raons que permeten arribar al radi de curvatura), ens mostra, gairebé «pas per pas», quina és la diferència dels dos tractaments. Amb Huygens i la teoria de les corbes evolutes, la geometria clàssica assoleix una de les seves extremes aplicacions. Però la substitució dels mètodes geometrics pel mètode de fluxions de Newton posa de manifest l'interès d'una nova eina teòrica com el càlcul diferencial que permet integrar la generalitat i operativitat del càlcul analític a problemes geomètrics sobre infinitèsims.

Conclusió

Si en un principi el nostre objectiu era estudiar com tractava Huygens el tema del radi de curvatura en la seva obra sobre el rellotge de pèndol, hom d'adona que resulta impossible l'estudi d'un determinat concepte, vist per un determinat autor, aïllant-lo del moment històric en què s'inscriu.

El treball de Huygens referent al radi de curvatura ens mostra la potència dels mètodes de la geometria predecessora del càlcul diferencial. El fet que no aparegui en la seva obra cap relació entre les corbes evolutes i el concepte de curvatura no s'explica per una manca d'eines teòriques apropiades sino pel gran interès dels matemàtics de l'època pels problemes de rectificació de corbes. La prioritat que dóna Huygens a aquest tema li permet mostrar l'interès, no només pràctic, de la teoria de corbes desenvolupades, i no el deixa aturar-se en la noció de radi de curvatura, malgrat donar-ne una construcció. Però deixa latent en el seu treball la importància, i fins i tot la necessitat d'aquest concepte, que Newton s'encarrega de definir i caracteritzar, posant de manifest l'avantatge del nou càlcul de fluxions que esdevindrà més tard una eina bàsica en el tractament de problemes geomètrics.

El naixement del concepte de radi de curvatura amb les dues construccions que hem presentat reflecteix el moment històric que l'envolta. Els diferents tractaments que li han donat il·lustren les diferents teories i els diferents mètodes matemàtics que caracteritzen una època de l'evolució de la matemàtica marcada per l'aparició del càlcul diferencial.

Bibliografia

Boyer, C. B. (1968), *Historia de la Matemàtica,* Alianza Editorial, Madrid, 1986.

Coolidge, J. L. (1940), *A history of geometrical methods,* Dover Publications, New York, 1963.

Coolidge, J. L. (1952), «The unsatisfactory story of curvature», *American Mathematical Monthly,* **59**, pàgs. 375-379.

Figuier, L. (1872-1876), *Vie des savants illustres du XVIIème siècle*, Hachette, Paris.

Huygens, C. (1673), «Horologium Oscillatorium sive De Motu Pendulorum ad Horologia aptato Demostrationes Geometricae, Pars Tertia», *Oeuvres Complètes de Christiaan Huygens,* tom 18, La Haia, 1934.

Montucla, J. E. (1799), *Histoirie des mathématiques,* Paris, 1802.

Newton I. (1736), «De methodis Serierum et Fluxiorum», *The mathematical papers of Isaac Newton,* Vol. III, D. T. Whiteside ed., Cambridge, 1969.

Rey Pastor, J. i Babini, J. (1985), *Historia de la Matemática*, Vol. II, Gedisa, Barcelona, 1986.