La fonamentació de l'anàlisi al segle XIX Un model per als nombres reals

Josep Ramon Chicano Requena

«Déu creà els enters, la resta és cosa de l'home».

LEOPOLD KRONECKER

La fonamentació rigorosa de l'anàlisi, que es produeix majorment durant el segle XIX, va exigir una fonamentació rigorosa del sistema dels naturals, de les fraccions i els incommensurables. Tota noció de límit o continuïtat reposava en l'estructura dels nombres. Era necessari, doncs, establir una bona definició del sistema de nombres que garantís que les intuïcions filosòfiques de «veritat» que envoltaven els nombres i les seves propietats (racionals i, en més gran mesura, irracionals) tinguessin una formulació clara, alhora que els nous conceptes sobre límits poguessin gaudir de demostracions clares i satisfactòries, sense deixar el més mínim dubte sobre els fonaments de l'anàlisi i de la coherència total del mateix sistema dels nombres.

Euclides ja havia donat en els seus *Elements* una definició d'igualtat que utilitzava la idea de dividir en dues classes els nombres racionals m/n tals que la primera està composada pels nombres racionals m/n menors que l'incommensurable a/b i una altra formada pels racionals tals que l'expressió m/n és més gran que a/b. Naturalment, no va establir què era un incommensurable, i per tant tampoc la seva relació amb els racionals, més familiars per a la intuició. Es curiós que aquest mateix argument, contemplat des d'un altre punt de vista, fos la base de la definició dels irracionals donada per Richard Dedekind al segle XIX.

Un dels pioners en la qüestió d'una millor fonamentació de l'anàlisi (en la seva aritmetització i en l'estudi acurat de l'infinit) va ésser el sacerdot bohemi, filòsof i matemàtic, Bernhard Bolzano. El 1799 Gauss havia donat una demostració del teorema fonamental de l'àlgebra usant consideracions geomètriques. Bolzano, no obstant, desitjava una prova que es derivés de l'aritmètica, l'àlgebra i l'anàlisi. Bolzano volia intentar-ho evitant l'ús de la intuició espacial. Aquesta actitud va fer necessàriament una definició rigorosa de la continuïtat. El càlcul podia ésser pensat veritablement com un resultat del reconeixement pitagòric de la dificultat de substituir consideracions numèriques per magnituds geomètriques suposadament contínues.

Newton havia evitat aquesta dificultat apel·lant a la intuïció del moviment continu i Leibnitz apel·lava al postulat de continuïtat. Bolzano, no obstant, va donar una definició de funció contínua que deixava clar per primera vegada que la idea de continuïtat depenia del concepte de límit. Ell va definir una funció contínua en un interval si per a tot valor x en aquell interval, la diferència $f(x + \Delta x) - f(x)$ és més petita que tota quantitat donada, per a Δx suficientment petit, ja sigui positiu o negatiu. Aquesta definició no és essencialment diferent de la que més tard va donar Cauchy al seu *Cours d'analyse* i que encara avui és fonamental pel càlcul.

En presentar els elements del càlcul, Bolzano veu clarament que s'havien de presentar en funció de límits de fraccions de diferències finites. Ell va definir la derivada de $F(x)$ per a tot valor de x com la quantitat $F'(x)$ a la qual la fracció $\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$ s'aproxima tant a prop com volem, a mida que Δx s'aproxima a zero. Fent això, Bolzano va molt més enllà que tots els matemàtics precedents en precisar la importància del concepte de límit. Lagrange i altres matemàtics havíen pensat que el concepte de límit estava lligat amb el quocient de quantitats evanescents o de zeros. Euler i Lacroix havien explicat la quantitat $\frac{dy}{dx}$ com un quocient de zeros. Bolzano afirma que $\frac{dy}{dx}$ no s'ha de pendre com a un quocient sinó com a un símbol per a una determinada funció. Explica que s'ha d'interpretar com un valor límit que fa a la derivada una funció continua en el punt on val «$\frac{0}{0}$».

Fins aquest moment, pel fet que aquestes nocions estaven lligades a la mecànica, es pensava que la continuïtat era un requisit suficient per a la derivabilitat. No obstant, el 1834, Bolzano va donar un exemple de funció contínua no diferenciable en cap punt, desfent així la ingenuïtat matemàtica precedent.

Lagrange havia mantingut que el seu mètode de sèries infinites no necessitava considerar infinitesimals ni límits, però Bolzano va indicar que en aquest cas era necessari tractar les qüestions de convergència. És a dir, si la seqüència $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x), \ldots, F_{n+r}(x)$, és tal que la diferència entre $F_n(x)$ i $F_{n+r}(x)$ es fa tan petita com volem si n creix indefinidament, només hi ha un valor límit al qual la successió s'acosta tan a prop com volem. Aquesta proposició fonamental de Bolzano tindrà una gran significació posteriorment respecte a la definició general de nombre real i de continu aritmètic.

Bolzano sentia, a pesar de les paradoxes presentades per les nocions d'espai i temps, que tot continu s'havia de pensar en darrera instància com a una col·lecció de punts. El seu punt de vista es semblant al de Galileu Galilei, al qual Bolzano es refereix en relació a aquest tema. Encara que nega l'existència de l'infinitament gran o l'infinitament petit, ell manté, com Galileu, la possibilitat de l'infinit actual. Va remarcar la mateixa paradoxa que Galileu havia ressaltat: que la part (en aquest cas) es podia posar en correspondència un a un amb el tot. Els punts de vista de Bolzano sobre l'infinit són substancialment aquells que els matemàtics han adoptat des del temps de Georg Cantor, excepte en el cas que Bolzano havia considerat de diferents potències de l'infinit, que després han resultat ésser la mateixa. Bolzano, no obstant tracta de provar l'existència de l'infinit sobre bases teològiques, mentre que més tard en el segle XIX, la propietat que ell i Galileu havien considerat una paradoxa seria feta per la clarificació del càlcul de Richard Dedekind, la base de la definició dels conjunts infinits.

Encara que les idees de Bolzano indiquen la direcció en la qual anirà la formulació definitiva del càlcul, la seva contribució no va ésser decisiva, i va romandre mig segle fins la recuperació que en va fer Hermann Hankel. Afortunadament, per la mateixa època, el matemàtic Augustin L. Cauchy va proposar idees semblants que sí varen assolir l'estatus de bàsiques pel càlcul.

Cauchy rivalitza amb Euler en quant al treball matemàtic, contribuint amb més de 800 llibres en quasi totes les branques de la matèria. Entre ells hi ha els mètodes de rigor que van introduir a l'anàlisi en tres grans tractats: *Cours d'analyse de l'École Polytechnique* (1821), *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal* (1823) i *Leçons sur le calcul différentiel* (1829). A través d'aquestes obres Cauchy va fer més que qualsevol altre matemàtic per a la fonamentació de l'anàlisi i li donà el regust que te avui dia.

La manca de precisió del concepte de límit prové de la seva formulació mitjançant la intuició geomètrica. En aquest aspecte, Euler i Lagrange representaren una excepció ja que volien fonamentar l'anàlisi en el seu concepte de funció analítica. Però fins i tot ells rebutjaren la idea de límit. Encara, doncs, que D'Alembert, L'Huilier i Lacroix popularitzaren el concepte de límit en els seus treballs, preparant el terreny a Cauchy, el concepte va romandre geomètric força temps. Es demanava una certa visualització de límits que en molts casos (el cercle com a límit de polígons inscrits) retardaven l'aritmetització d'aquest concepte i per tant el progrés de l'anàlisi. En donar la seva definició, que avui dia s'estudia a l'escola secundària, el va divorciar de tota referència a les figures o magnituds geomètriques, dient: «Quan els successius valors atribuïts a una variable s'aproximen indefinidament a un valor fix de tal manera que en difereixen tan poc com es vulgui, aquest darrer s'anomenarà el límit de tots els altres».

Aquesta és la definició més clara i concisa donada fins llavors encara que altres matemàtics, més tard, la varen criticar, en un intent d'aconseguir una definició encara més precisa i més formal. La definició de Cauchy utilitza les nocions de número, variable i funció i no d'intuïcions geomètriques. Conseqüentment ho il·lustra dient que un número irracional és el límit de diverses fraccions racionals que prenen valors més i més aproximats al límit. A partir d'ací Cauchy va passar a definir el vaporós terme d'infinitesimal. Cauchy torna a enfocar-ho aritmèticament: «Es diu que una magnitud variable arriba a ésser infinitament petita quan el seu valor numèric decreix infinitament de tal manera que el seu valor numèric convergeix cap al límit zero». Així un infinitesimal no és diferent d'altres variables, excepte pel fet de convergir a zero. Cauchy defineix també els infinitesimals d'ordre superior: $y = f(x)$ és un infinitesimal d'ordre n respecte l'infinitesimal x si

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(\frac{y}{x^{n-\epsilon}}\right) = 0 \text{ i } \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(\frac{y}{x^{n+\epsilon}}\right) = \pm\infty$$

on ϵ és una constant positiva molt petita. Un altre cop s'imposen les idees de variable, funció i límit en contraposició a les concepcions de Newton i Leibnitz.

Però Cauchy no va admetre la possibilitat d'un infinit actual, com feia Bolzano, degut a les paradoxes que comportava, admetent només l'infinit potencial d'Aristòtil, expressant-ho en termes de variables indifinidament creixents o decreixents cap a zero. La derivada, el concepte central del càlcul, és definit com ho feia Bolzano, però Cauchy no considera el límit del qüocient incremental com ja existent sinó que condiciona el concepte a l'existència del límit $f'(x)$ de $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ fent que $\frac{dy}{dx}$ sigui un símbol per a $f'(x)$. El que va ressaltar Cauchy és que el concepte de diferencial és dependent i prové del concepte de derivada, que prové del concepte de límit. El que fa Cauchy també és definir, en termes de límits, la continuïtat d'una funció en un interval, fent que el límit de $f(x)$ quan x s'acosta a un punt a de l'interval sigui $f(a)$ per tal que la funció sigui contínua. Això clarifica en gran manera les confusions que s'havíen produït sobre el tema des de l'època dels grecs, fent que la idea del continu resideixi en certes relacions aritmètiques i no en confuses indissolubilitats no aclarides del tot. A partir de llavors varen arribar un nou conjunt de problemes centrats en els conceptes de diferencial i de derivada, excloent l'estudi de la integral, com a inversa de la derivada, fent que les integrals definides es transformessin en un problema de límits (integral de Cauchy-Riemann) i va demostrar la relació que hi ha entre una funció $f(x)$ i la seva integral definida: si $f(x)$ és contínua, llavors

$$F'(x) = f(x) \text{ on } F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx.$$

Això i altres problemes generals exigeixen una teoria ben formada dels nombres reals. Cauchy havia establert en el seu curs d'anàlisi que els nombres irracionals s'havien de considerar com a límits de successions de nombres racionals, però això ja implica la pròpia existència dels nombres irracionals, raonament circular que Cauchy no va apreciar en el seu moment. Això pot ésser degut a què les intuïcions de partida sobre els nombres són geomètriques. Però a fi de fer el concepte de límit independent d'aquestes intuïcions geomètriques, els matemàtics de la segona meitat del segle XIX intentaren definicions dels nombres irracionals independents de la intuïció geomètrica, i independents del concepte de límit. Aquestes intuïcions varen ésser les que van fer que Cauchy pensés que la continuïtat d'una funció era suficient per a la seva representabilitat geomètrica i derivabilitat, cosa ja demostrada errònia per Bolzano, encara que això no es va saber fins que Weierstrass ho va fer conegut. Però totes aquestes contribucions de Cauchy fan que el considerem com el fundador del càlcul en el sentit modern del terme, i la seva versió amb petites modificacions és la que s'estudia en el primer curs d'anàlisi.

Encara que Cauchy va donar als conceptes del càlcul la forma general que tenen ara, la darrera paraula en rigor no havia estat dita, i va ésser Karl Weierstrass qui va construir una base aritmètica purament formal per al càlcul. Weierstrass va llegir el 1872 un artricle on es feia palès que havia conegut Bolzano des de molt abans, i que la continuïtat no garanteix la derivabilitat, i ho va fer donant l'exemple $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$, on x és una variable real, a un sencer imparell i b una constant positiva menor que 1 tal que $a \cdot b > 1 + \frac{3\pi}{2}$.

El fet de que la intuició no fos ja fiable, va impulsar Weirstrass a donar bases més fermes a l'anàlisi. Però els seus punts de vista es varen fer coneguts no per tractats com en el cas de Cauchy, sinó pels treballs dels seus alumnes, especialment Pincherle. A fi d'assegurar l'exactitud lògica, Weierstrass va establir les bases de l'anàlisi en el concepte de número i sols en aquest. Així es va dedicar a investigacions en profunditat sobre l'aritmètica, particularment sobre els nombres irracionals. En un cert sentit, allò que fa Weierstrass és considerar la successió corresponent a un irracional com l'irracional mateix, plantejament que serà vital en els treballs de Dedekind i Cantor. Weierstrass també interpretava una variable x simplement com a un conjunt de valors numèrics. I una variable esdevenia contínua en un conjunt si per a tot valor x_0 del conjunt i tota successió de valors petits positius $\delta_1, \delta_2, \ldots$, hi ha en els intervals $(x_0 - \delta_i, x_0 + \delta_i)$ altres elements del conjunt. Similarment, en condicions estàtiques, una funció era contínua si donat qualsevol ϵ es pot trobar un η_0 tal que si $\eta < \eta_0$ la diferència $f(x \pm \eta) - f(x)$ és menor en valor absolut que ϵ. El límit d'una variable o funció és similarment definit. L és el límit de la funció $f(x)$ per $x = x_0$ si donat un número arbitràriament petit ϵ, podem trobar un altre nombre δ tal que per a tots els valors que difereixen de x_0 en menys que δ, el valor de $f(x)$ diferirà de L en menys que ϵ. Aquesta expressió del concepte de límit, conjuntament amb la definició de derivada de Cauchy (i d'integral), van donar als fonaments del càlcul una precisió gairebé definitiva. Per això l'expressió popular de «càlcul infinitesimal» resulta inapropiada ja que ja no hi intervenen per a res els infinitèsims. La darrera qüestió que calia plantejar era la dels nombres irracionals. Aquest estudi era ara possible degut a la teoria estàtica del càlcul que havia donat Weierstrass.

L'any 1872 és l'any més significatiu en la història dels fonaments del càlcul. Els documents més importants van ésser les classes de Weierstrass sobre aritmètica presentades pel seu alumne Kossak (*Die Elemente der Arithmetik*), el treball de Charles Méray (*Noveau précis d'analyse infinitésimale*), el treball d'E. Heine al Journal de Crelle (*Die Elemente der Funktionlehre*) i sobretot el primer article de Georg Cantor als *Matematische Annalen: Über die Ausdehnung eines Satzes aus der theorie der trigonometrischen reihen* (sobre una extensió dels fonaments de la teoria de les sèries trigonomètriques), i l'obra *Stetigkeit und die Irrationale Zahlen* (Continuïtat i nombres irracionals) de Richard Dedekind. El treball de tots aquests matemàtics va incidir en el mateix punt: la formació d'una teoria dels irracionals sense l'utilització del concepte de límit. Bolzano i Cauchy havíen intentat demostrar que una successió de Cauchy, on les diferències entre termes es fan tan petites com volem, té un límit extern. Méray considerava números als sencers i als racionals, mentre que les successions de Cauchy de racionals que ell anomenava «variantes» les considerava equivalents a un número, ja sigui racional o irracional. En aquest sentit, encara que menys clarament, la seva teoria és equivalent a la de Weierstrass. El treball d'Heine i Cantor va en aquest sentit de considerar els irracionals com a grups infinits de racionals prescindint de la idea de límit i solucionant així la petició de principi present en els raonaments de Cauchy. El nombre irracional *s* és la successió mateixa (no està «determinat per ella»). Dedekind va començar a interessar-se en el problema el 1858 quan va haver de llegir els elements del càlcul infinitesimal.

L'aproximació de Dedekind és lleugerament diferent que les de Weierstrass, Méray, Heine i Cantor, ja que es pregunta en general quina és l'essència de la continuïtat en comptes d'intentar evitar la petició de principi de Cauchy. Va fer l'analogia de les rectes, on tota divisió en dos vé donada per un únic punt, per estudiar perqué això no passava en el conjunt dels racionals. Els punts de la línea formen doncs un continu, mentre que els racionals, no. Com expressa al seu treball *Aquí rau el secret de la continuïtat.* Aleshores fa un treball de «completació» dels racionals, per tal de ressemblar-los al conjunt de punts de la recta. Únicament és necessari acceptar l'axioma de Cantor-Dedekind pel qual els nombres reals es poden posar en correspondència bijectiva amb els punts de la recta. Això significa que per a cada partició (Schnitt) del conjunt dels reals en què tots els elements de la primera part són més petits que tots els de la segona, hi ha un i sols un nombre real que produeix la partició. Així tot nombre real és una partició d'aquest tipus en el conjunt dels racionals. Aquest postulat fa continu el domini dels reals, en el sentit que la línea recta té aquesta mateixa propietat. La definició de Dedekind és però lògicament equivalent a les de Weierstrass, Méray, Heine i Cantor. Posteriorment Bertrand Russell pren aquesta definició i considera que no cal implicar la geometria sinó únicament prendre les classes de racionals com a nombres reals, evitant la necessitat lògica de sortir a l'exterior com feia Dedekind. Així, es poden derivar tots els teoremes del càlcul sense circularitat en el raonament, com ja feia Dedekind en la darrera part del seu treball.

El càlcul esdevé així no una branca de la ciència de les quantitats, sinó de la lògica de les relacions.

Després de tot aquest raonament, que estableix el càlcul tal com és avui dia, demostrant que tot l'anàlisi no necessita més que sistemes finits o infinits de nombres, s'escau especialment la frase famosa de Pitàgores: Tot és nombre!

Bibliografia

Abrégé d'Histoire des Mathématiques, 1700-1900. Tome I. Sous la direction de Jean Dieudonné. Hermann, Paris, 1978.

K. Rychlik. *Theorie der Reellen Zahlen in Bolzanos handschriftlichen Nachlasse.* Verlag der Tschechoslov. Akad. Wiss. Praga, 1962.

B. van Rootselaar, *Bolzano's theory of real numbers.* Archive for the history of exact sciences, t. 2, pp. 168-180, 1962-1966.

L. A. Cauchy. *Oeuvres completes,* tome III.