L'ofici de matemàtic i l'ensenyament de les matemàtiques

Jesús Hernández*
Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Madrid

> En realitat, tant si ens agrada com si no, tota pedagogia matemàtica, per molt incoherent que sigui, es basa en una filosofia de les matemàtiques. La tendència modernista es recolza fonamentalment en la concepció formalista de les matemàtiques.
>
> R. THOM

1. Introducció

Tant si s'hi està d'acord com si no, la frase anterior de Thom pot servir de punt de partida per a algunes reflexions sobre l'ensenyament de les matemàtiques i les idees, més o menys encertades, que puguin tenir sobre aquest assumpte els matemàtics de professió. D'això se n'han ocupat també Castellet i Guzmán en les seves intervencions en aquestes jornades, però des de punts de vista diferents, encara que complementaris, dels nostres. De fet, la nostra manera d'enfocar el tema ha estat tenint en compte aquesta circumstància.

Les matemàtiques, l'única ciència tal vegada digna d'aquest nom (com va dir més o menys Hobbes), tenen un status bastant peculiar, i això tant pel que fa al seu paper i importància en l'ensenyament secundari, que és l'únic del que parlarem aquí, com a la seva situació en els estudis de filosofia de la ciència. Quant al primer, les matemàtiques han estat servint, amb diferències segons els països i els moments, de mètode de selecció de l'alumnat; el cas extrem d'aquesta situació és segurament el seu paper en l'accés a les anomenades «grans escoles» a França. En quant al segon, han compartit amb la Lògica una posició distinta de les ciències experimentals, i també de les socials, humanes, o com es vulgui anomenar-les. D'una o altra manera, les seves veritats semblen haver estat considerades sempre de naturaleza diferent de les d'aquestes altres ciències, a moltes de les quals, a més, se'ls ha regatejat tal denominació.

El punt de vista des del que s'han escrit les següents línies no és solament el de

* Jesús Hernández és professor d'Anàlisi Matemàtica de la Universitat Autònoma de Madrid.

l'experiència professional del seu autor, ni tampoc l'associat, diguem-ne, amb la sociologia de l'ofici. Hem volgut recollir aquí, en general limitant-nos a una ràpida cita per raons d'espai, alguns dels problemes plantejats per les matemàtiques en la recent filosofia de la ciència. Creiem que això pot ser útil a l'hora de reflexionar sobre les matemàtiques com a activitat, i que pot proporcionar elements de judici que ajudin a fer-nos una idea global, en el sentit de la frase de Thom a dalt reproduïda, del que es fa quan s'ensenyen les matemàtiques.

2. Context de descobriment i context de justificació. Rigor i intuïció

Les matemàtiques han estat presentades tradicionalmente com una ciència *rigorosa,* en la que les veritats es basen en una argumentació sólida i indiscutible, a la qual sol associar-s'hi el nom de *demostració*. El model d'aquesta presentació ha estat durant aproximadament dos mil anys un llibre, els *Elements* d'Euclides, els defectes del qual en aquest ordre, encara que mínims per altra banda, no van començar a ser senyalats fins fa poc temps. Però aquesta confiança en la solidesa de l'edifici matemàtic va ser qüestionada, i amb força, farà ara un segle, i durant bastant temps, en l'episodi que se n'ha dit, encertadament o no, *Crisi de fonaments*, d'on van sorgir les tres escoles bàsiques en els fonaments de la matemàtica logicista, formalista, i intuïcionista, i després de la qual, de totes maneres, res no ha tornat a ser com abans [1]. Des d'aquest punt de vista fundacional de la filosofia de les matemàtiques, els dos esdeveniments decisius, entre molts d'altres dels que encara no se n'ha escrit la història amb tota mena de detalls, van ser el teorema d'incompletesa de Gödel, i la demostració per Paul Cohen, que completava el que havia fet abans el mateix Gödel, que la Hipòtesi del continu és indecidible dins d'un cert marc de la teoria axiomàtica de conjunts generalment acceptat. En particular, el teorema d'incompletesa venia a tirar per terra el programa formalista de Hilbert per fonamentar la matemàtica [2].

La filosofia de les matemàtiques fundacionalista ha continuat el seu desenvolupament, que ha agafat un caràcter cada vegada més tècnic, i del qual aquí no en parlarem. Del que ens ocuparem és del que s'ha dit sobre les matemàtiques dins de la filosofia de la ciència que pot dir-se'n postpopperiana, en el sentit de presentar-se com una reacció a les postures de Popper, i en particular al seu conegut llibre *La Lógica de la investigación científica* (1934) [3]. Aquesta filosofia de la ciència inclou noms com els de Kuhn, Lakatos, Toulmin, Feyerabend, Hanson, etc., i els seus conreadors s'han interessat sobretot per la física. Però algun d'ells, Lakatos, ha escrit coses summament suggestives sobre les matemàtiques; a més, algunes idees d'altres, sobretot de Kuhn, poden ser utilitzades profitosament en les matemàtiques.

De tots els motius de discussió o crítica d'aquests filòsofs amb Popper (i amb el Cercle de Viena, amb els Carnap, Neurath, etc.) ens quedarem amb un de sol, el de la posada en qüestió de la distinció entre *context de descobriment* i *context de justificació*, en la mesura que admet una interpretació molt interessant per a les matemàtiques.

La distinció entre aquests dos contextos és de nissaga neopositivista, i sol associar-se al nom de Reichenbach (1930). La seva principal raó de ser va ser probablement el desig de distingir la metodologia rigorosa dels neopositivistes en filosofia de la ciència, de la consideració d'altres aspectes, menys nobles per a ells, de l'activitat científica, que quedaven per a disciplines com la història, la sociologia, la psicologia de la invenció, susceptibles d'estudiar altres factors que intervenien en la gènesi dels descobriments científics. La història de la ciència, per exemple, podia ocupar-se de les circumstàncies en què s'havien produït els descobriments, i els diversos elements que hi havien intervingut, però era del tot aliena als processos de formulació i justificació lògiques de les teories que constitueixen la forma acabada del coneixement científic. La distinció és clara, i el seu camp d'aplicació preferent el de les ciències experimentals.

A la vista de la presentació anterior, es pot tenir la temptació de *traduir* al domini matemàtic aquesta distinció pensada per a altres. De fet, tot això ja es troba en diversos escrits molt anteriors, d'un gran matemàtic, Poincaré. Un text com

No, el nom que li donen els matemàtics és suficient per demostrar-ho, En matemàtiques la lògica es diu anàlisi, i anàlisi vol dir divisió, dissecció. No pot tenir altre instrument que l'escalpel i el microscopi.

Així, doncs, tant la lògica com la intuïció fan un paper necessari. Totes dues són indispensables. La lògica, l'única que pot donar la certesa, és l'instrument de la demostració: la intuïció és l'instrument de la invenció

plantejaba ja el problema al nostre camp amb tota lucidesa, i molts dels escrits de Poincaré giren entorn de qüestions del mateix ordre.

No és complicat, com dèiem abans, transvasar aquesta distinció a les matemàtiques: el context de justificació seria la forma perfecta i acabada dels teoremes i proposicions matemàtics, seguits de llurs demostracions, suposadament rigoroses i inapelables, mentre que el context de descobriment serien totes aquelles circumstàncies, d'un o altre tipus, que haurien pogut portar el matemàtic a l'obtenció dels seus resultats. Sembla, fins i tot, que la distància en importància entre tots dos seria major en matemàtiques que en les ciències de la naturaleza. Peró de la simple lectura del text anterior de Poincaré (i d'altres) se'n pot deduir immediatament que ambdós contextos no són compartiments impenetrables i independents, sinò que existeix entre ells una interacció molt rica conceptualment, incloent entre altres components una història no gens menyspreable.

I això ens porta a enllaçar de nou amb els filòsofs postpopperians dels que en parlàvem fa un moment. Perquè, tot i prenent formes ben distintes en cada un d'ells, tots tenen una perspectiva històrica que qüestiona la rígida distinció entre ambdós contextos, que es presenten barrejats en l'activitat efectiva dels científics, en contrast amb la separació artificial que es fa entre ells en aquesta filosofia de la ciència en els darrers trenta anys, matèria de nombrosos articles i de discussions inacabables. Alguns dels filòsofs abans citats, són alhora autors d'aportacions importants a la història de la ciència —com Kuhn sobre la revolució copernicana o el cos negre— però fins i tot els que no han fet d'historiadors han tingut molt en compte les aportacions de la història de la ciència en els seus escrits.

La història de les matemàtiques no ha quedat al marge d'aquesta tendència, i s'ha desenvolupat considerablement durant el mateix període. Les dues grans històries generals es van publicar fa uns vint anys [4], peró d'aleshores ençà s'han escrit un considerable nombre d'històries parcials, ja sigui en forma de llibre o d'article monogràfic, cosa que ha contribuït a millorar notablement el nostre coneixement de la història de diverses branques de les matemàtiques. Queda encara molt per fer, però és innegable la millora que s'ha produït i que tot fa pensar que continuarà en els propers anys. Assenyalem tanmateix l'aparició de revistes com els *Archives for History of Exact Sciences* o *Historia Mathematica*.

De tot el que s'ha dit se'n pot treure la conclusió que el qüestiónament de la pertinència de la distinció de context de descobriment i de justificació ha de reflectir-se en les matemàtiques prenent una actitud anàloga davant les relacions entre rigor i intuïció. Però el context més adequat per a això no és el d'una matemática que sigui, dit amb paraules de Carnap, «la sintaxi del llenguatge matemàtic», sinó el d'una filosofia de les matemàtiques que presti atenció a l'evolució de tot el que es refereix als descobriments matemàtics —començant per fer-ne un seguiment històric rigorós— i que els situi en un marc ben diferent.

Dels autors abans citats, Imre Lakatos és el més interessat per les matemàtiques. Tant al seu llibre *Pruebas y refutaciones* [5] com als seus altres escrits sobre la matèria [6], ha estat un crític dur de les activitats abans esmentades.

Amb l'expressió «escola formalista» faré al·lusió a aquella escola de filosofia matemàtica que tendeix a identificar les matemàtiques amb la seva abstracció axiomàtica formal (i a la filosofia de les matemàtiques amb la metamatemàtica).

El formalisme desconnecta la filosofia de les matemàtiques de la història de les matemàtiques, ja que, d'acord amb la concepció formalista de les matemàtiques, aquestes no tenen pròpiament història... El formalisme nega la condició de matemàtiques a la majoria de les coses que normalment s'han considerat com a tals i no pot dir-ne res del seu desenvolupament. Cap dels períodes «creatius» de les teories matemàtiques, i difícilment algun dels «crítics», haurien de ser admesos a la pàtria celestial formalista, on les teories matemàtiques hi habiten com els serafins, purgades de totes les impureses de l'incertesa terrenal.

Lakatos reclama un paper per a la història en la filosofia de les matemàtiques. L'anàlisi del que en pensava sobre la qüestió i del que va fer en els seus escrits —dues coses que no tenen per què coincidir— seria massa llarga per incloure-la aquí. Diguem només que *Pruebas y refutaciones* està dedicat quasi íntegrament a l'exposició, en forma de diàleg, del que va passar amb un famós teorema d'Euler sobre la relació entre el nombre de cares, arestes i vèrtexs d'un poliedre, i que aquesta exposició és el que l'autor en diu una «reconstrucció racional» enviant les dades històriques precises a les notes de peu de pàgina, cosa que ha estat recriminada de moltes maneres. A la part final del llibre dedica també alguna atenció a l'episodi del teorema de Cauchy sobre la continuïtat del límit d'una successió de funcions contínues, problema que torna a tractar més endavant en un altre lloc.

Segons la nostra opinió, una bona part del que ha dit Lakatos podria reformular-se amb avantatge inscrivint-ho en el marc de la concepció de la història de la ciència que presenta Kuhn en el seu famós *La estructura de las revoluciones científicas* [7], concepció no acumulativa, on es critica amb agudesa la visió tradicional del descobriment científic, i que exemplifica excel·lentment considerant el cas del descobriment de l'oxígen. Continuant amb la seva versió, tres científics s'atribueixen aquest descobriment: Scheele, Priestley i Lavoisier. Scheele va ser el primer en aconseguir una mostra del gas, però ho va anunciar després d'altres. Priestley va identificar un dels gasos que havia obtingut (el 1774) com òxid nitrós i el 1775 com aire amb menys flogist del que és habitual. Lavoisier va obtenir el 1775 un gas que era «*l'aire mateix..., més pur, més respirable*», i el 1777 el va considerar com un dels components de l'atmosfera.

La pregunta de qui i quan va descobrir l'oxígen no té, aleshores, una resposta definitiva. Es pot dir que l'oxígen va ser descobert després de 1774, potser el 1777 o un xic després. Però em sembla que tot intent de precisar més és inevitablement arbitrari, en la mesura que el descobriment d'un nou tipus de fenomen suposa la seva identificació. Diu Kuhn:

Però si tant l'observació i la conceptualització com el fet i l'assimilació a la teoria estan enllaçades inseparablement en un descobriment, aquest, aleshores, és un procés i comporta temps. Sols quan totes les categories conceptuals pertinents estan preparades per endavant, i en aquest cas el fenomen no serà d'un tipus nou, podrà descobrir-se sense esforç què existeix i què és, al mateix temps i en un instant.

Es podria pensar que aquesta situació és pròpia de les ciències experimentals i que no seria possible en les matemàtiques, ciència formal, on no poden plantejar-se dubtes d'aquesta classe. Però també en aquest aspecte les matemàtiques són més a prop del que sembla de les ciències experimentals. Tot això que diu Kuhn sobre l'oxígen pot comparar-se amb el que diu Bourbaki sobre els logaritmes:

— *Qui és l'autor del teorema log* $x = \int dx/x$, *i quina és la seva data? La fórmula, tal i com acabem d'escriure-la, és de Leibniz, ja que ambdós membres estan escrits amb la seva notació. El mateix Leibniz, i Wallis, l'atribueixen a Gregori de Saint-Vicent. Aquest últim... demostra solament...*

Després de citar uns quants autors més i discutir la relació entre els logaritmes i el càlcul d'àrees determinades per segments d'hipèrbola, Bourbaki fa el resum del què ha succeït:

Un cop donat aquest pas... el teorema log $x = \int dx/x$ *ha estat obtingut, llevat la notació, o més aviat es converteix en una definició. ¿Quina conclusió hem de treure d'aquí, si no és que el descobriment es realitza per mitjà de transicions quasi insensibles, i que una disputa de prioritats sobre aquest assumpte s'assemblaria molt a una discussió entre el violí i el trombó pel moment exacte que apareix un motiu en una* *simfonia? I cal dir que, mentre que altres creacions matemàtiques de la mateixa època, com l'aritmètica de Fermat o la dinàmica de Newton, tenen una empremta poderosament individual, el desenvolupament del càlcul infinitesimal durant el segle* XVII *fa pensar molt més en el desenvolupament gradual i inevitable d'una simfonia de la que el Zeitgeist, compositor i director d'orquestra a la vegada, marcaria el compàs: cadascú hi executa la seva part amb el seu propi timbre, però ningú no és amo dels temes que toca, temes que han estat enllaçats quasi inextricablement per un savi contrapunt.*

Potser això pugui sorprendre als qui creuen que la història de les matemàtiques és lineal i acumulativa. La història del càlcul infinitesimal, de totes maneres, és pròdiga en episodis conflictius, i de tots és sabut que la discussió sobre els fonaments del càlcul va durar molt de temps i va tenir moltes vicissituds. Una d'elles és la polèmica sobre les possibles solucions de l'equació d'ones entre d'Alembert, Euler i Bernoulli, durant la qual apareix la possibilitat de desenvolupar funcions en sèrie de Fourier, problema al seu torn relacionat amb l'episodi del teorema de Cauchy abans eludit i estudiat per Lakatos.

En efecte, el problema de la convergència de les sèries de Fourier està ja plantejat, d'una manera o altra, en la famosa *Teoría analítica del calor,* del propi Fourier, llibre que es publica quasi al mateix any que el no menys famós *Curs d'Anàlisis* de Cauchy, considerat com un dels punts decisius de la formulació rigorosa de l'anàlisi matemàtica, en el que nocions com límit, continuïtat, derivada, etc., són definits d'una forma que alguns fins i tot s'arriben a identificar amb les actuals. En aquest curs hi ha precisament el teorema abans indicat sobre la continuïtat de la funció límit d'una successió convergent de funcions contínues. Que aquest teorema no era cert ho posà de manifest en primer lloc Abel, qui va mostrar precisament l'exemple de la sèrie de Fourier (formada, com totes, per funsions contínues) de certa funció discontínua. L'episodi és intrigant, perquè Cauchy coneixia aquests resultats, que eren un contraexemple per al seu teorema, però no es dóna per assabentat fins més de trenta anys després. Per altra banda, Dirichlet demostra un teorema de convergència per a sèries de Fourier que era incompatible amb el teorema de Cauchy, però no en diu res.

Fa temps que se sap que el teorema de Cauchy és cert si s'afegeix la condició que la convergència de la sèrie sigui uniforme. Una condició semblant intervé igualment en la dilucidació d'un altre dels errors de Cauchy, la seva demostració que tota funció contínua és integrable (en el sentit de Cauchy), per a la correcció de la qual seria necessari utilitzar el fet que una funció contínua en un interval tancat és uniformement contínua en ell. L'episodi del teorema de Cauchy ha estat àmpliament discutit en la literatura, i s'han donat explicacions tan variades com incompatibles entre si, algunes d'elles basades en *l'anàlisi no estàndard*, de Robinson, una recent creació de lògica moderna que vindria a reivindicar alguns dels arguments de Leibniz utilitzant infinitèsims. En un altre lloc hem intentat argumentar, després d'un examen crític detallat de les diverses versions històriques el teorema de Cauchy, que amb la noció de convergència uniforme ha passat quelcom semblant al que hem dit abans sobre el descobriment de l'oxígen [8].

Aquest episodi del teorema de Cauchy es produí durant el procés que sol dir-se'n d'*aritmetització de l'anàlisi*, procés que es comença a acceptar a principis del segle passat amb Abel, Gauss i el mateix Cauchy, per continuar desenvolupant-se, mitjançant persones com Riemann i Dirichet, fins a Weierstrass i Dedekind. Recordem que els nombres reals no reben una formulació del tot satisfactòria (des del nostre punt de vista, evidentment) fins els voltants de 1870, quan coincideixen diverses presentacions equivalents: successions fonamentals de Cantor, tallaments de Dedekind, etc. I amb la teoria de conjunts de Cantor avança l'estudi de l'estructura fina de la recta real i els seus subconjunts, la teoria de la mesura i moltes coses més.

Pot sostenir-se que casos com el del teorema de Cauchy eren possibles a causa de la encara no acabada reforma dels fonaments del càlcul, i que un cop feta aquesta reforma, es tornarien impensables. Això és, en cert sentit, vertader. Però l'argument anàleg segons el qual tot episodi semblant ho seria igualment després de la crisi de fonaments, de les solucions millors o pitjors trobades a les dificultats plantejades per les paradoxes, i de la formulació rigorosa de les matemàtiques a partir de la teoria axiomàtica de conjunts de Zermelo-Fraenkel, per exemple, no és sostenible a la vista dels fets històrics.

Perquè les matemàtiques informals no han acabat, sinó que han continuat fins avui, encara que, això sí, amb ritmes i manifestacions distints en les diferents parts de les matemàtiques. No manquen exemples, i ens limitarem a mencionar-ne alguns. Dins del mateix càlcul infinitesimal, diversos arguments que usaven sèries divergents van ser *rigoritzats* mitjançant diverses extensions de la noció de convergència encara a principis d'aquest segle. Un altre cas, més important, és el de la geometria algebraica italiana, escola que va obtenir nombrosos resultats fonamentals, però que les seves demostracions deixaven —si bé no sempre— molt que desitjar des del punt de vista del rigor; la justificació totalment correcta d'alguns d'ells es va fer esperar desenes d'anys, i no va acabar fins més o menys els primers anys cinquanta, quan els mètodes de l'àlgebra abstracta usats per Zariski, Chevalley, Weil i d'altres van culminar aquesta tasca. Un altre exemple notable és el de la teoria de distribucions, que han servit per *rigoritzar* igualment variades pràctiques dels físics (com la famosa «delta de Dirac») i dels matemàtics. I en una història recent d'aquesta teoria es diu el següen:

Al prefaci vaig plantejar la pregunta: ¿qui va inventar les distribucions i quan? i vaig donar una resposta provisional: Sobolev el 1936 i Schwartz el 1950. Un cop discutida en detall la prehistòria de la teoria de les distribucions, la pregunta sembla massa general i ha de ser precisada. Si un es pregunta pels primers que van fer servir distribucions en matemàtica, la resposta és: Fourier el 1822, Kirchoff el 1882 i Heaviside el 1896. Si un es pregunta per una teoria rigorosa, que tal vegada només usi distribucions implícitament, la resposta és: Bochner el 1932. Si un vol saber qui va ser el primer en definir rigorosament les distribucions com a funcionals, la resposta és: Sobolev el 1935. I, per últim, si volem trobar l'home que va veure les aplicacions de llarg abast de la teoria i la va desenvolupar, va ser Schwartz entre els anys 1946 i 1950... L'abundància de respostes a la pregunta del prefaci mostra com és d'ambigu el terme «descobriment» [9].

També ara hi ha una situació anàloga a diversos dominis de la matemàtica: citem tan sols, per la seva actualitat, la freqüència amb què són utilitzats arguments no del tot rigorosos en diverses parts de la matemàtica relacionades amb la teoria de supercordes.

¿Què tenen en comú els casos anteriors i quines conseqüències se'n pot treure? Anar-se'n a l'altre extrem, és, sens dubte, equivocat: multitud de teoremes han estat trobats per una persona en una data determinada, i ningú no en dubta. Creiem que la direcció de la resposta més adequada és la de considerar que els resultats han de ser inserits en un marc o univers conceptual ben organitzat —o almenys raonablement organitzat— i que només en aquest cas és possible situar immediatament els descobriments que es produeixen sense que hi hagi lloc a dubtes. Però els exemples anteriors de la teoria de distribucions i de la geometria algebraica de l'escola italiana mostren que l'existència d'una teoria axiomàtica de conjunts generalment acceptada i d'uns criteris de rigor també molt àmpliament compartits no són condicions suficients a l'hora d'acabar amb pràctiques *dubtoses* quan aquestes responen a necessitats internes en l'exercici quotidià de l'ofici de matemàtic (o de físic teòric). I aquesta condició, que no és suficient, tampoc no és *necessària*, com molt bé posa de manifest la història del càlcul infinitesimal en diverses ocasions, entre elles la història de la idea de logaritme abans esmentada.

Resulta aleshores que aquesta idea —una miga vaga, la veritat sigui dita— d'organització informal, no necessàriament lligada a una presentació axiomàtica, que permet aconseguir una exposició clara, ordenada i satisfactòria d'alguna teoria (o alguna part d'ella) pot ser molt més manejable a l'hora d'explicar múltiples episodis de la història de les matemàtiques. Una de les seves característiques fonamentals és la que, un cop aconseguit un cert estadi, la marxa enrera no és possible: un cop s'ha arribat a un cert punt, la convergència uniforme deixa de ser motiu de confusions. I la vaguetat que dèiem és, d'alguna manera, consubstancial amb la creació científica, d'un costat, i amb el millor de la filosofia contemporània de la ciència.

Diguem, per acabar aquest apartat, que tot el que s'ha dit fins ara sobre el rigor i les seves relativitzacions pot traslladar-se amb les degudes precaucions, a la intuïció, tant a la del matemàtic professional, com a la del docent de qualsevol tipus, com a la de l'estudiant. Fent les distincions pertinents, en les quals no entrarem ara, la intuïció matemàtica no és en cap dels casos una qualitat innata del ser humà, sinó un producte de la història cultural i de la biografia personal, que va tenint en compte, dirigint i incorporant, tant en el pla individual com en el gremial o col·lectiu, l'experència acumulada. La intuïció es va desenvolupant a mesura que es va treballant en un problema, o una teoria, i es va enriquint amb el temps i la profunditat del treball realitzat. El matemàtic professional considera *naturals* —és un adjectiu que es fa servir molt— coses que quan va veure per primera vegada fa molts anys li van resultar incomprensibles i misterioses.

3. Les demostracions en matemàtiques

Hem parlat fins ara de la interacció entre el rigor i la intuïció matemàtics pel que fa al descobriment. Acabarem amb algunes consideracions sobre uns dels aspectes principals d'aquesta interacció o, si voleu, el seu fruit: la demostració.

La demostració s'ha considerat, i no sense motiu, com una de les notes característiques de la matemàtica, com allò que la distingeix específicament. En la seva versió tradicionalment acceptada, i dit sense precisar massa els detalls, la demostració pot presentar-se com una argumentació clara i distinta que parteix d'unes premisses per a dur inevitablement i indubtablement a unes conclusions. I no obstant, també la demostració darrerament s'ha vist sotmesa a crítiques de diversa índole, i s'han vist discutides algunes de les seves manifestacions més notòries.

Thom ha escrit diverses vegades sobre aquestes qüestions i algun cop amb un considerable ressò. Enumera tres concepcions de rigor matemàtic: la platònica, la formalista, i la que ell en diu *empirista* o *sociològica*, segons la qual «*es considera que una demostració és rigorosa si és acceptada pels millors especialistes del moment*». Per a ell resulta molt significatiu que en la història de les matemàtiques no es puguin citar exemples d'errors humans que hagin fet desencaminar la ciència matemàtica. Quant al rigor:

> «*Cal prendre partit. No hi ha una definició rigorosa del rigor. Des d'aquest punt de vista el rigor (o el seu contrari, la imprecisió) són bàsicament una propietat local del raonament matemàtic.*»[10]

Des de punts de vista semblants pot ser molt més fàcil entendre episodis de la història de les matemàtiques, que no ho són tant des d'un de convencional. Per limitar-nos a un de sol, el del teorema de Cauchy de la continuïtat de la funció límit, sol repetir-se, i no sense motiu, que Cauchy va introduir el rigor en l'anàlisi, que va donar definicions precises de límit, funció contínua i derivable, convergència de sèries, etc., i que, en direcció contrària, va proscriure l'ús de les sèries divergents. Però no tots diuen a continuació que Cauchy no és solament l'autor de les declaracions de principi contingudes en el pròleg del seu famós curs d'anàlisi, segons les quals pretenia fer desaparèixer «*tota metafísica*» del càlcul i suprimir «*tota incertesa*», sinó també el matemàtic que en el mateix llibre infringeix sovint les seves regles, no demostra formalment la continuïtat de les funcions, opera lliurement amb sèries i integrals, canvia l'ordre en sèries condicionalment convergents, etc.

Tornant a les demostracions, molts consideren que no han sofert modificacions essencials des dels grecs fins a nosaltres. Per a Bourbaki:

> *...a partir dels primers textos detallats que coneixem (que daten de mitjans del segle V), el cànon ideal d'un text matemàtic està perfectament fixat, i trobarà la seva realització més perfecta en els grans clàssics, Euclides, Arquímedes i Apol·loni: la noció de demostració en aquests autors no es diferencia en res de la nostra.*
>
> *No tenim cap text que ens permeti seguir els primers passos d'aquest «mètode deductiu», que se'ns apareix ja pròxim a la perfecció en el mateix instant que constatem la seva existència* [11].

Ara bé, la demostració no és ni ha estat l'únic mètode utilitzat pels matemàtics per arribar als resultats que constitueixen la seva ciència. Sempre s'han utilitzat procediments heurístics, i Poincaré ha escrit pàgines molt atractives sobre el paper de la intuïció en les demostracions matemàtiques. Les demostracions no són solament importants perquè proporcionen la certesa que un resultat és vertader. sinó també perquè posen a la vista el pla intern de l'argumentació, situant cada detall tècnic dins d'ell i permetent *entendre* en el fons els motius pels quals la demostració compleix realment la seva missió.

Des de mitjans del segle passat, els matemàtics han procurat amb afany d'atènyer la certesa absoluta: tenen raó, i aquesta tendència s'accentuarà més cada dia. En matemàtiques, la certesa no ho és tot, però sense ella no hi ha res; una demostració que no sigui rigorosa no és res. Suposo que no se li ocurrirà a ningú discutir aquesta veritat. Però si se la prengués massa al peu de la lletra, es podria deduir que abans de l'any 1820, per exemple, no hi havia matemàtiques, i això seria excessiu.

El paper de les demostracions en la matemàtica ha estat discutit de moltes maneres els darrers anys, i anem a veure'n algun dels motius. Segons Manin, «*l'evolució dels criteris comunament acceptats perquè un argument pugui ser considerat com una demostració és un tema quasi inèdit en la història de la ciència*».

El qüestionament de les demostracions ha estat un dels punts en el que han insistit els defensors —citem solament a Lakatos i Putnam— de les anomenades concepcions *quasi-empíriques* de les matemàtiques, que pretenen acostar aquestes últimes a les ciències empíriques. Sense entrar en la descripció acurada d'aquestes postures, diguem que per a elles la demostració no és l'única manera d'arribar a conclusions matemàtiques: Putnam, per exemple, arriba a dir que els matemàtics fan servir mètodes anàlegs als de la física, però amb la diferència que els enunciats singulars que es fan servir per comprovar les teories són ara el resultat de càlculs [12].

Algunes parts de les matemàtiques s'han prestat tradicionalment a l'ús d'aquests mètodes a l'experimentació. Aquest és el cas de la teoria de nombres, en la que els mètodes de càlcul directe s'han utilitzat abundosament a l'hora de trobar nombres primers o comprovar resultats possiblement certs, alguns tan famosos com l'últim teorema de Fermat o la hipòtesi de Goldbach. El desenvolupament dels ordinadors durant els últims decennis ha donat un important impuls a aquests estudis, establint-se quasi una competició esportiva per millorar el nombre primer major conegut o els *tests* per determinar si un nombre és primer o no; això no és tot, perquè resulta que la factorització d'un nombre primer en factors molt grans té força importància en criptografia. Deixant de banda importants aportacions en altres branques de les matemàtiques (combinatòria, teoria de grafs, investigació operativa, equacions en derivades parcials, etc.) notem que el recent desenvolupament del que se n'ha donat en dir-ne caos (sensibilitat a les condicions inicials, cascades de Feigenbaum, atractors estranys, fractals) només ha estat possible gràcies a aquest desenvolupament dels mitjans de computació [13].

Pel que sembla, la concepció gremial o social de la demostració de Thom que mencionàvem abans no ha estat discutida en públic amb certa amplitud fins fa quatre dies, i seria curiós conèixer les raons per les quals ha estat així. Sense pretendre tampoc fer-ho, anem a indicar dos dels possibles incentius: l'ús d'ordinadors en la demostració d'algun problema matemàtic *clàssic*, com el dels «quatre colors», i la longitud extraordinària d'algunes demostracions, sobretot (però no únicament) en la teoria dels grups finits simples.

Per a Manin, «una demostració només és una demostració després del fet social d'haver estat acceptat com una demostració»: tota demostració ha de ser acceptada per altres matemàtics, i mentre això passa pot ser millorada. La longitud enorme d'algunes demostracions —la de Feit i Thompson d'un teorema per a grups finits ocupa 280 pàgines de la revista on es va publicar, però no és l'únic cas— i la impossibilitat pràctica de *formalitzar* les demostracions informals dels matemàtics en termes de la lògica formal, el porten a reflexions del gènere següent:

Per tant, l'absència d'errors en un article de matemàtiques (suposant que no se n'ha descobert cap) s'estableix sovint de manera indirecta: depèn de com encaixen els resultats amb allò generalment esperat, de l'ús d'arguments semblants en altres articles, de l'examen amb microscopi d'algunes parts de l'article, fins i tot de la fama de l'autor...

La història de les matemàtiques és molt pròdiga en errors comesos per matemàtics de primeríssima fila en intentar demostrar teoremes importants. Però és notable que en alguns casos ha calgut esperar un temps perquè es descobrissin i molt més perquè es resolguessin. Només dos exemples: el lema de Dehn en topologia, de 1910, no va ser discutit fins que Kneser va trobar-hi un error el 1929, i la demostració correcta no va arribar fins el 1957 amb Papakryakopoulos; la demostració de Kempe de 1879 que quatre colors són suficients per pintar un mapa (de cert tipus) de manera que dos països limítrofs tinguin assignats colors diferents, contenia un error que no va ser trobat fins el 1890 per Heawood, i els passos necessaris per corregir aquest error no van acabar fins el 1976, quan es va publicar la demostració d'Appel i Haken. Per cert que aquesta demostració, també molt llarga, té una altra particularitat que ha contribuït a què se'n parli encara més: la demostració consisteix en reduir tots els casos possibles a uns quants (milers de) casos particulars, que després van ser tractats un a un en un ordinador.

Aquests dos tipus de demostracions-tipus a més no disjuntes, com acabem d'iniciar, plantegen problemes qualitativament nous en quant a la seva comprensió i a la confiança que s'hi pot dipositar. Sembla cada vegada més difícil o impossible que se segueixi aplicant sense to ni so el criteri convencional que un lector il·lustrat pugui, *en principi*, comprovar tots els detalls, i que no puguin passar desapercebuts errors petits, a vegades fàcils de corregir, tan freqüents en les matemàtiques; hi ha la possibilitat, per exemple, que en la classificació dels grups simples finits se n'hagi *escapat* algun. Sobre això, un dels artífexs de la teoria (Gorestein) contesta d'aquesta manera:

No obstant, la impresió que domina és que amb tanta gent treballant sobre grups simples durant els darrers anys, i sovint des de punts de vista molt diferents, totes les configuracions interessants haurien d'haver-se posat de manifest amb freqüència i no podrien haver passat desapercebudes gaire temps.

Diguem de passada que aquest problema ens ofereix també un bon exemple del caràcter quasi-empíric de les matemàtiques: quan el mateix Gorenstein parla de les «proves aclaparadores» de l'existència, que encara no s'havia demostrar rigorosament, de l'anomenat «monstre de Fisher», un grup amb uns $8 \cdot 10^{53}$ elements, pot pensar-se en el descobriment del neutrí o d'alguns dels últims planetes.

Sobre les consideracions precedents hauríem pogut estendre'ns i aprofundir-hi de moltes maneres; en elles hi són mencionats o implicats molts dels problemes més importants que avui té plantejats la filosofia de les matemàtiques. Si els hem enumerat aquí és perquè creiem que la seva consideració i discussió, lluny de qualsevol postura totalitzadora i unilateral —com la que va dur a una implantació desafortunada de les «matemàtiques modernes» a l'ensenyament— no pot ser nociva per als qui pensin que l'ensenyament de les matemàtiques, en totes les seves formes, no ha aconseguit la perfecció, i que la pluralitat i l'enriquiment dels punts de vista des dels que la contemplem ens en puguin donar una visió menys limitada.

Notes

1. Vegeu sobre això M. Kline, *La pérdida de la certidumbre*, Madrid, Siglo XXI, 1985, que ofereix un bon panorama de conjunt.

2. No cal dir que l'exposició que es fa és molt resumida i que les simplificacions excessives són quasi inevitables. També volem dir que la comprensió de les qüestions tècniques que surten a l'article, no és en absolut necessària —creiem— per entendre el que es pretén amb l'article.

3. K. Popper, *La lógica de la investigación científica*, Madrid, Tecnos, 1962. Encara que l'obra es va publicar el 1934 en alemany, no va adquirir certa notorietat fins a la primera edició anglesa de 1959.

4. Ens referim a C.B. Boyer, *Historia de las matemáticas*, Madrid, Alianza, 1968 (la primera edició original és de 1968) i M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Nova York, Oxford University Press, 1972. De la segona n'hi ha una traducció castellana en premsa per a Alianza Editorial. En castellà pot veure's també N. Bourbaki, *Elementos de historia de las matemáticas*, Madrid, Alianza, 1976, així com J.P. Collette, *Historia de las matemáticas*, Madrid, Siglo XXI, 1985.

5. I. Lakatos, *Pruebas y refutaciones*, Madrid, Alianza, 1978.

6. I. Lakatos, *Matemáticas, ciencia y epistemología*, Madrid, Alianza, 1981.

7. T.S. Kuhn, *La estructura de las revoluciones científicas*, México, F.C.E., 1971.

8. Volem indicar que moltes de les idees aquí presentades han estat exposades més extensament als articles *Descubrimientos y teorías en matemáticas*, Rev. de Occidente 52 (1958), 65-82 i *Rigor e intuición en matemáticas*, Arbor 187 (1986) 29-50, que hem utilitzat àmpliament.

9. Es tracta de J. Lutzen, *The pre-history of the theory of distributions*, Berlin, Springer, 1982. Insistim de nou que el coneixement tècnic no és necessari per a res.

10. Reproduït a J. Piaget i altres, *La enseñanza de las matemáticas modernas*, Madrid, Alianza, 1978, p. 122. Diversos articles d'aquest llibre, inclosos els de Thom i Dieudonné, són interessants des d'aquest punt de vista.

11. Lloc citat nota 4, pp. 12-13.

12. Per a Lakatos, vegeu el llibre citat en la nota 6. De Putnam no hi ha, que sapiguem, traducció castellana.

13. Això no esgota, ni de bon tros, la llista de possibles influències. Una altra qüestió interessant és l'aplicació a la demostració automàtica de teoremes o a la verificació automàtica de programes. Vegeu, G. Lolli, *Máquinas y demostraciones*, Alianza Editorial (en premsa).