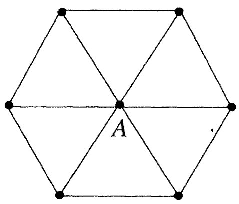
XXVII Olimpiada matemàtica

Divendres, 14 de desembre de 4 a 8

1. La figura adjunta representa un entramat de camins per on pot moure's una tortuga mecànica la qual, en cada cruïlla, escull a l'atzar un qualsevol dels camins que pot seguir. Si deixem la tortuga lliure en el punt A, calculeu la probabilitat que torni a passar pel punt A abans de n moviments.



2. Determineu quina condició han de complir les xifres de les desenes de dos nombres acabats en 6 perquè el seu producte acabi en 36.

3. Siguin r i R dos rectangles d'àrea 1, amb el perímetre de R doble que el perímetre de r. Siguin d i D les longituds de les diagonals de r i R.

a) Demostreu

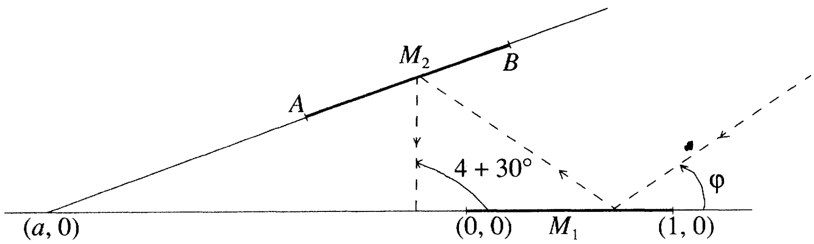
$$2 < \frac{D}{d} \leq \sqrt{7}$$

b) Si $D = d\sqrt{5}$, determineu les longituds dels costats dels rectangles r i R.

4. Prenem un sistema rectangular de coordenades al pla. Tenim un mirall M_1 unidimensional posat cara amunt sobre el segment d'extrems (0,0) i (1,0). Sobre la recta que passa per $(a,0)$ amb $a < 0$ i que té pendent $m > 0$ posem un mirall M_2 unidimensional d'extrems A i B mirant cap avall. Determineu a, m i els punts A i B perquè es compleixi:

a) Tot raig que arriba a M_1 amb un angle φ respecte de la direcció de les x positives, $30° \leq \varphi \leq 45°$, és reflectit cap a M_2, es reflecteix a M_2 i no torna a trobar mai més M_1. L'angle entre la direcció de les x positives i el raig que arriba de M_2 és $\varphi + 30°$.

b) La longitud de M_2 és mínima respecte a tots els possibles miralls que compleixen la condició anterior.



Dissabte, 15 de desembre de 9 a 1

5. Trobeu els nombres de 4 xifres que són iguals al quadrat de la suma del nombre format per les dues primeres xifres i el format per les dues darreres xifres.

6. Considereu un triangle equilàter inscrit en una circumferència de radi l. Li fem una rotació d'angle φ de centre en el centre de la circumferència. Calculeu l'àrea comuna als dos triangles i el valor de l'angle φ a fi i efecte que l'àrea comuna sigui mínima.

7. Demostreu que tot nombre de la forma $2/n$, n senar, es pot pósar com la suma de dues fraccions unitàries diferents (és a dir, fracción de numerador l).

Deduïu-ne que tota fracció m/n (n senar) admet una descomposició en suma de fraccions unitàries diferents.

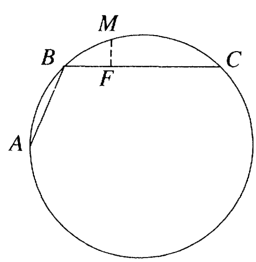
Comproveu també que si m/n admet una descomposició en suma de r fraccions unitàries diferents, n'admet una altre en suma de s fraccions unitàries per tot $s > r$.

8. Siguin AB i BC dues cordes d'un cercle ($AB < BC$) i sigui M el punt mig de l'arc ABC. Sigui F el peu de la perpendicular des d'M a la corda BC.

a) Proveu que F és el punt mig de la «corda trencada»: $AB + BF = FC$.

b) Useu-ho per veure que

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$



XXVII Olimpiada matemàtica espanyola. Fase nacional

15-16 de febrer de 1991

1. Considerem, un cop fixat un sistema de coordenades, els punts (m, n) del pla les coordenades dels quals són nombres sencers. Hom suposa dibuixats tots el segments rectilinis que uneixen dos qualsevol d'aquests punts i que tenen longitud sencera. Proveu que no és pas possible que dos d'aquests segments formin un angle de $45°$. Si fessim el mateix amb els punts (m, n, k) de l'espai, ¿hi hauria alguna parella de segments que formés un angle de $45°$?

2. Suposem que a i b són dos nombres sencers, diferents de 0, 1 i -1 i considerem la matriu

$$\begin{pmatrix} a+b & a+b^2 & a+b^3 & \dots & a+b^m \\ a^2+b & a^2+b^2 & a^2+b^3 & \dots & a^2+b^m \\ a^3+b & a^3+b^2 & a^3+b^3 & \dots & a^3+b^m \\ & & & & \\ a^n+b & a^n+b^2 & a^n+b^3 & \dots & a^n+b^m \end{pmatrix}$$

Determineu un subconjunt S de files d'aquesta matriu, el més petit possible, tal que qualsevol altre fila es pugui expressar com una suma de les files d'S, multiplicades per nombres sencers apropiats (és a dir, com una combinació lineal amb coeficients sencers de les files d'S). Feu explícites aquestes combinacions lineals.

3. Considereu l'equació $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, $r \neq 0$, que suposem que admet tres arrels reals i positives x_1, x_2, x_3. Determineu la relació que ha de lligar els nombres p, q, r per tal que els 3 nombres x_i puguin ésser les longituds dels costats d'un triangle.

4. Siguin A', B' i C' els punts de tangència dels costats BC, CA i AB d'un triangle amb la seva circumferència inscrita. Sigui D el punt d'intersecció de $C'A$ amb la bisectriu de l'angle $\angle A$. Raoneu quan amida l'angle $\angle ADC$.

5. Donat un nombre natural n, hom designa amb $s(n)$ la suma de les seves xifres, suposant-lo expressat en el sistema binari de numeració (és a dir, el nombre de xifres igual a 1 que conté). Demanem que determineu, per a cada nombre natural k,

$$\sigma(k) = s(1) + s(2) + \dots + s(2^k).$$

6. Calculeu la part sencera de

$$s = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10000}}.$$