

Anàlisi de missió d'un satèl·lit artificial

G. Gómez*

1. Introducció

Cap a mitjans de l'any 1995 l'Agència Espacial Europea (ESA), dins el seu programa científic, té previst el llançament del satèl·lit SOHO (Solar and Heliospheric Observatory) en un projecte conjunt amb l'Agència Espacial nordamericana NASA.

Entre les tasques que el satèl·lit SOHO ha de dur a terme destaquen: l'observació de les capes més superficials del Sol, la mesura de la seva velocitat i les oscil·lacions de lluminositat i la mesura *in situ* del vent solar. Totes aquestes observacions i mesures les ha de fer durant un període de temps gran, aproximadament sis anys, malgrat que el desitjable fora de 13 anys per tal de cobrir un cicle solar complet. Una missió semblant ja va ser duta a terme pel satèl·lit americà ISEE-C entre els anys 1978 i 1982.

El desenvolupament d'una missió espacial es veu condicionat per restriccions tècniques lligades, tot sovint, a raons de tipus econòmic. Per exemple:

- La fiabilitat de les components del satèl·lit, per exemple les encarregades de la seva estabilització, encareix de manera notable el seu preu. Això es veu agreujat si es demana una bona fiabilitat per a un interval de temps llarg.
- L'elecció del tipus de motors (d'hidrazina, de gas fred, etc.) que ha de dur el satèl·lit per a realitzar maniobres està lligada a les observacions que ha de fer i als aparells que les han de dur a terme. Un motor d'hidrazina permet fer maniobres grans però contamina durant un cert temps l'atmosfera del satèl·lit, impeding fer determinat tipus d'observacions. Un motor de gas fred no és contaminant però sols permet fer maniobres d'uns pocs centímetres per segon.
- El tipus d'antena que ha dur, mòbil o fixa, per tal de tenir una bona comunicació amb la Terra, per descomptat que també repercuteix en el cost de la missió, a la vegada que imposa fortes restriccions sobre el tipus d'òrbita que s'ha de triar com a òrbita nominal.

* Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi, Universitat de Barcelona.

L'anàlisi de missió, tenint en compte lligams com els esmentats, s'ocupa entre d'altres, de les següents qüestions:

- Estudi de les possibles òrbites nominals tenint en compte els requeriments científics de la missió, així com els lligams tècnics i operatius (per exemple d'observació del satèl·lit des de la Terra).
- Selecció i determinació acurada de l'òrbita nominal.
- Càlcul de les finestres de llançament.
- Càlcul i optimització de les maniobres a realitzar, tant per a la transferència des de la Terra a l'òrbita nominal com per al manteniment del satèl·lit sobre la seva òrbita nominal, per tal d'aprofitar al màxim el consum de combustible.

El que hem proposat explicar a continuació són els resultats que hem obtingut sobre els quatre darrers punts que acabo d'esmentar, en l'anàlisi de missió del satèl·lit SOHO. L'estudi ha estat realitzat en col·laboració amb A. Jorba, J. Llibre, J. Masdemont, R. Martínez i C. Simó i el que aquí exposaré es troba detallat a les referències [1] i [2].

2. Modelització: el problema restringit de tres cossos

La selecció d'una òrbita en qualsevol problema té com a pas previ la modelització d'aquest. En el cas que ens ocupa es tracta de modelitzar el moviment d'un cos amb massa menyspreable (la del satèl·lit) en el camp creat, fonamentalment, per les forces gravitatòries degudes als cossos presents al sistema solar.

Per als satèl·lits artificials que es mouen al voltant de la Terra, si sols tenim en compte les forces gravitatòries, un model aproximat útil per a poder fer estimacions preliminars, és el problema de dos cossos. A mesura que ens allunyem de la Terra la influència del Sol es fa cada vegada més notable i aquest problema deixa de ser un bon model. Aleshores, l'anomenat Problema Restringit de Tres Cossos (PRTC) resulta, per a molts propòsits, més proper a la realitat.

El PRTC estudia el moviment d'una partícula en el camp de forces creat per dos cossos, anomenats primaris, que es mouen en òrbites circulars al voltant del seu centre de masses, sense que la presència de la partícula influeixi en el moviment dels dos cossos.

Aquest problema, simplificació del problema general de tres cossos, que ja va despertar l'interès d'Euler (1772) i Jacobi (1836), va ser utilitzat per Hill (1878) per l'estudi del moviment de la Lluna, i és un dels paradigmes, en la teoria general dels Sistemes Dinàmics, de sistema hamiltonià amb dos graus de llibertat no integrable.

En un sistema de referència adequat (veure figura 1) i si s'agafa la unitat de longitud com la distància entre els dos primaris i la unitat de temps de manera que la velocitat angular del moviment circular dels primaris sigui igual a 1, les equacions que defineixen el PRTC són:

$$\begin{aligned}\ddot{X} - 2\dot{Y} &= \Omega_X, \\ \ddot{Y} + 2\dot{X} &= \Omega_Y, \\ \ddot{Z} &= \Omega_Z,\end{aligned}$$

amb

$$\Omega = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2) + (1 - \mu)r_1^{-1} + \mu r_2^{-1},$$

i

$$\begin{aligned}r_1^2 &= (X - \mu)^2 + Y^2 + Z^2, \\ r_2^2 &= (X - \mu + 1)^2 + Y^2 + Z^2.\end{aligned}$$

Les equacions del moviment tenen cinc punts d'equilibri, tres d'ells: L_1 , L_2 i L_3 , estan alineats amb els primaris i el altres dos: L_4 i L_5 , formen triangles equilàters sobre el pla x - y amb els primaris, tal com mostra la figura 1.

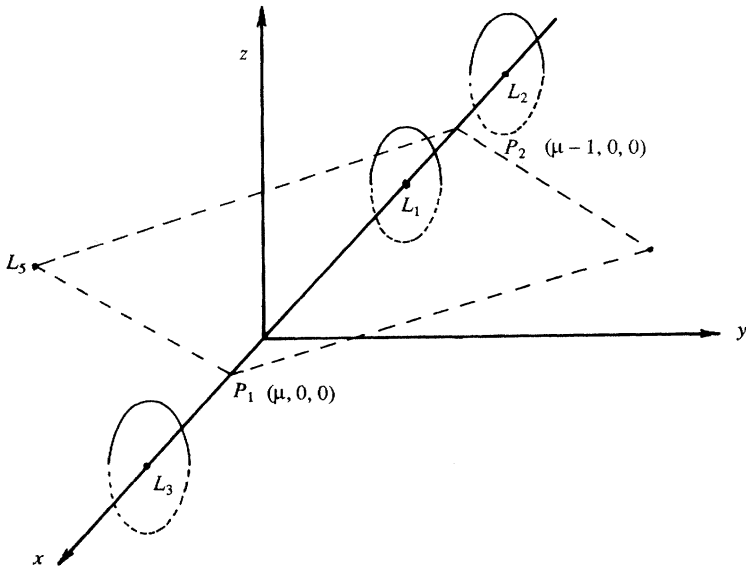


FIGURA 1.

Una partícula situada en un d'aquests punts amb velocitat nul·la roman per sempre més en ell. En l'espai físic l'atracció dels dos primaris es cancel·la amb la força centrífuga i la partícula es mourà sobre una òrbita circular igual que ho fan els primaris, sent la seva posició respecte d'aquests sempre la mateixa.

Al sistema solar hi ha alguns exemples que confirmen la utilitat d'aquest problema per a la modelització. Si prenem el Sol i Júpiter com a primaris, els asteroides Troians es mouen en les proximitats dels punts triangulars que defineixen aquests dos primaris. Si es prenen la Terra i el Sol com a primaris, a les proximitats del punt

d'equilibri L_2 sembla que hi ha una certa concentració de pols interplanetari que reflexa la llum solar i dóna lloc al fenomen anomenat Gegenschein.

Considerarem, en el que segueix, el PRTC com un model del camp de forces creat pel sistema Terra+Lluna-Sol. En realitat el camp de forces creat pels cossos del sistema solar és molt més complex: l'òrbita del baricentre Terra-Lluna no és circular, en lloc del baricentre del sistema Terra+Lluna cal considerar l'efecte de la Terra i la Lluna per separat, s'ha de tenir en compte la presència dels altres planetes, especialment Venus i Júpiter, cal considerar altres forces no gravitatòries com la pressió de radiació solar, etc.

En aquest camp de forces els punts d'equilibri desapareixen. Malgrat això es poden definir punts «d'equilibri» geomètrics, per exemple respecte al baricentre del sistema Terra-Lluna i el Sol, mitjançant les mateixes relacions que s'utilitzen en el problema restringit. Els punts així definits «recorden» algunes propietats que tenien els punts d'equilibri propiament dits (veure [1] i [2]).

L'ús dels punts d'equilibri com a lloc adequat per a col·locar satèl·lits artificials va ser suggerit per primera vegada per R. Farquhar el 1966. Farquhar proposava utilitzar el punt L_2 (de fet una òrbita propera a aquest punt) del sistema Terra-Lluna per a situar un satèl·lit de comunicacions entre la Terra i la part oculta de la Lluna. Els punts triangulars d'aquest mateix sistema han estat suggerits per a la realització d'experiments d'interferometria òptica (projectes TRIO i PRISMA). El satèl·lit ISEE-C, que ja he esmentat, va ser situat a les proximitats del punt L_1 del sistema Terra+Lluna-Sol per a fer observacions del disc solar.

A fi d'utilitzar l'entorn del punt d'equilibri L_1 del sistema Terra+Lluna-Sol per a missions espacials cal anar en compte amb el següent:

- Evitar la col·linealitat del satèl·lit amb el Sol i la Terra, per tal de poder tenir una bona comunicació amb el satèl·lit des de la Terra. De fet no sols cal evitar la col·linealitat, sinó que, vista des de la Terra, l'òrbita del satèl·lit no ha de passar per tot un entorn al voltant del disc solar, a fi que els senyals radioelèctrics enviats pel satèl·lit no quedin enmascarats pels que emet el Sol.

Començarem estudiant quines possibilitats tenim a l'hora de triar una òrbita adequada per als nostres propòsits. Per això el desitjable és tenir una representació de l'espai de fases del problema que ens ocupa.

3. Descripció qualitativa de l'entorn del punt d'equilibri L_1

El comportament lineal de les equacions del moviment en un entorn del punt L_1 es del tipus: sella x centre x centre. És a dir, la funció d'Hamilton, H , associada al problema, després de fer una translació i un canvi lineal de variables, es pot escriure com

$$H = \lambda x_1 y_1 + \frac{1}{2} \omega_1 (x_2^2 + y_2^2) + \frac{1}{2} \omega_2 (x_3^2 + y_3^2) + \sum_{j \geq 3} H_j(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3),$$

a on el terme $\lambda x_1 y_1$ és el responsable de la inestabilitat i els dos que el segueixen són dos oscil·ladors harmònics.

El caràcter inestable fa difícil poder obtenir, per simulació numèrica directa, una descripció qualitativa de l'entorn del punt d'equilibri. Per a poder obtenir una descripció completa dels possibles moviments cal treure aquesta part inestable del moviment. Això es fa mitjançant el que s'anomena reducció a la varietat central.

En un primer pas cal eliminar de l'Hamiltonià els termes de la forma $x_1^{k_1} y_1^{l_1}$ amb $k_1 \neq l_1$. Per l'Hamiltonià resultant la funció $I_1 = x_1 y_1$ és una integral primera. La reducció a la varietat central s'obté fent $I_1 = 0$. D'aquesta manera s'arriba a un Hamiltonià de la forma

$$H^0 = \frac{1}{2}\omega_1(x_2^2 + y_2^2) + \frac{1}{2}\omega_2(x_3^2 + y_3^2) + \sum_{j \geq 3} H_j^0(x_2, x_3, y_2, y_3).$$

Mantenint $H^0 = h$ fixa, podem utilitzar $z = x_3 = 0$ com a superfície de secció a fi de representar les trajectòries properes al punt d'equilibri. És a dir, d'una determinada òrbita sols ens fixem en els punts en els que aquesta talla al pla de l'eclíptica ($z = 0$) quan passa de l'hemisferi Sud al Nord ($z > 0$). La figura 2 mostra els resultats obtinguts per a un valor de $h = 0,7$.

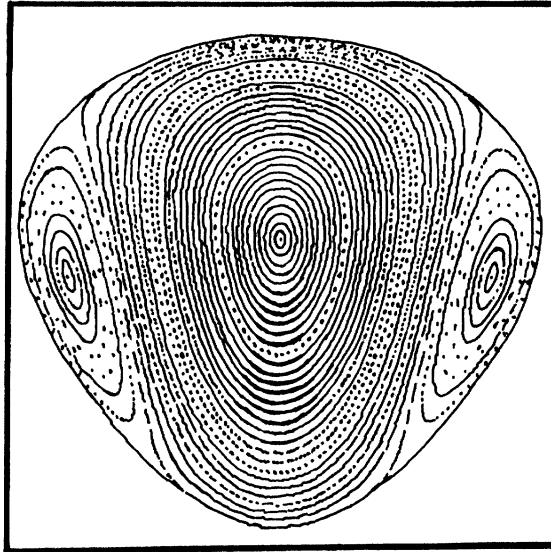


FIGURA 2.

En la figura la frontera exterior és l'única que mostra una òrbita sencera. Es tracta d'una òrbita situada al pla (x, y) que s'anomena de Lyapunov. La resta de punts s'agrupen en una regió central i dues zones laterals. Al mig de la regió central hi ha

un punt que correspon a una òrbita periòdica gairebé vertical respecte al pla de l'eclíptica. Al mig de cadascuna de les zones laterals hi ha un punt que correspon a una òrbita periòdica que s'anomena òrbita halo. Aquest tipus d'òrbites vistes des de la Terra, mirant cap al Sol, es veurien com un «halo» al voltant del Sol. Els altres punts de la regió central descriuen les anomenades òrbites de Lissajous. La major part d'aquests punts estan situats sobre corbes. Si en considerem un d'ells, els succes-

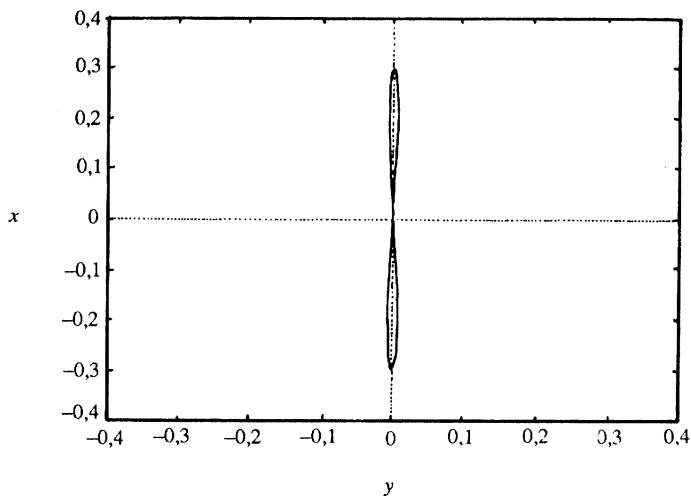


FIGURA 3.

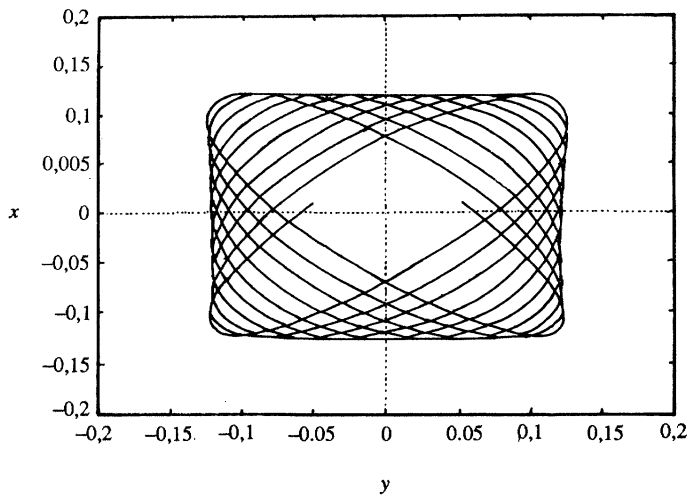


FIGURA 4.

sius talls de l'òrbita que representa estan tots situats sobre la mateixa corba. Els altres punts de les zones laterals són òrbites de Lissajous al voltant de l'òrbita halo corresponent.

El punt central de la figura està situat aproximadament a 1,5 milions de quilòmetres de la Terra, en la direcció Terra-Sol. Respecte de la figura la Terra està situada en la part superior fora de la corba exterior, i el Sol a la part inferior i a gran distància (148,5 milions de quilòmetres).

En les següents figures 3, 4 i 5 es mostren els tres tipus d'òrbites esmentats: l'òrbita periòdica vertical, una òrbita de Lissajous, i una òrbita halo.

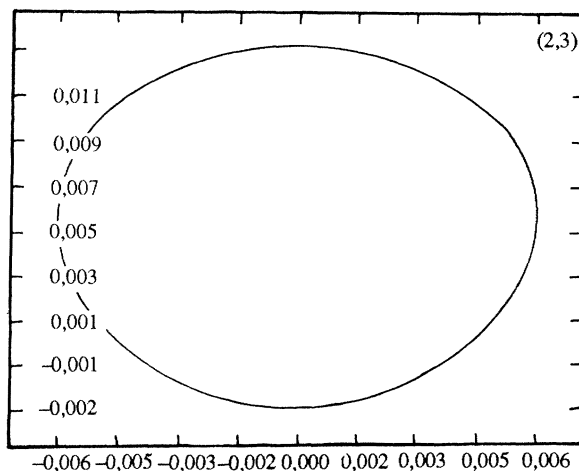


FIGURA 5.

4. L'òrbita nominal

A partir dels resultats exposats en l'apartat anterior, sembla raonable considerar com a candidates a l'òrbita nominal bé una òrbita de Lissajous o bé una òrbita halo. En un primer pas caldrà calcular-les.

Considerem un sistema de referència centrat al punt d'equilibri, amb l'eix x dirigit cap al primari de massa gran, l'eix z orientat com el moment angular sideral del secundari al voltant del primari, i l'eix y completant el sistema de coordenades.

Anomenem γ la distància del punt d'equilibri al secundari i escalem les variables de manera que γ valgui la unitat. Introduïm una nova variable independent τ mitjançant $\tau = \gamma^{3/2}t$. Fent els canvis de coordenades adequats i desenvolupant els inversos de les distàncies en termes de polinomis de Legendre podem escriure les equacions del problema restringit com

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{y} - (1 + 2c_2)x &= \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n \geq 3} c_n \rho^n P_n\left(\frac{x}{\rho}\right), \\ \ddot{y} + 2\dot{x} + (c_2 - 1)y &= \frac{\partial}{\partial y} \sum_{n \geq 3} c_n \rho^n P_n\left(\frac{x}{\rho}\right), \\ \ddot{z} + c_2 z &= \frac{\partial}{\partial z} \sum_{n \geq 3} c_n \rho^n P_n\left(\frac{x}{\rho}\right),\end{aligned}$$

on

$$c_n = \gamma^{-3} \left(\mu + (-1)^n (1 - \mu) \left(\frac{\gamma}{1 - \gamma} \right)^{n+1} \right).$$

Si ens restringim a la part lineal de les equacions, les solucions es poden escriure com

$$\begin{aligned}x &= \alpha \cos(\omega_1 t + \phi_1), \\ y &= -k\alpha \sin(\omega_1 t + \phi_1), \\ z &= \beta \cos(\omega_2 t + \phi_2),\end{aligned}$$

amb

$$\begin{aligned}k &= \frac{\omega_1^2 + 2c_2 + 1}{2\omega_1}, \\ \omega_1 &= \left(\frac{2 - c_2 + (9c_2^2 - 8c_2)^{1/2}}{2} \right)^{1/2}, \\ \omega_2 &= c_2^{1/2},\end{aligned}$$

a on α i β són amplituds arbitràries i ϕ_1 i ϕ_2 són fases. En general, aquestes solucions representen corbes de Lissajous. A l'afegir els termes no lineals, les freqüències ω_1 i ω_2 deixen de ser constants per passar a dependre de les amplituds, a fi d'evitar l'aparició de termes seculars d'acord amb el procediment de Lindstedt-Poincaré. Per amplituds adequades ambdues freqüències poden coincidir donant lloc a òrbites periòdiques: les òrbites halo esmentades en l'apartat anterior.

Tant les òrbites de Lissajous com les halo es poden calcular, fins a un cert ordre donat, per manipulació simbòlica, sempre que s'utilitzin manipuladors específics per aquest fi. Si tenim en compte les simetries de les equacions (per exemple la transformació $(x, y, z, t) \rightarrow (x, -y, z, -t)$ deixa les equacions invariants), podem calcular les òrbites de Lissajous com solucions de la forma:

$$\begin{aligned}x &= \sum a_{ijkm} \alpha^i \beta^j \gamma_1^k \gamma_2^m, \\ y &= \sqrt{-1} \sum b_{ijkm} \alpha^i \beta^j \gamma_1^k \gamma_2^m, \\ z &= \sum z_{ijkm} \alpha^i \beta^j \gamma_1^k \gamma_2^m, \\ \gamma_k &= \exp(i(\omega_k \tau + \phi_k)), \quad k = 1, 2\end{aligned}$$

amb certes condicions, imposades per les simetries, per als coeficients d'aquests desenvolupaments. El procediment consisteix en substituir les solucions esperades a les equacions diferencials del moviment i, per igualació de termes en $\alpha^i \beta^j \gamma^k \gamma^m$, determinar de manera recurrent els coeficients.

De manera semblant es poden calcular les solucions de tipus halo amb el següent aspecte:

$$\begin{aligned}x &= \sum a_{ijk} \alpha^i \beta^j \gamma^k, \\y &= \sqrt{-1} \sum b_{ijk} \alpha^i \beta^j \gamma^k, \\z &= \sum z_{ijk} \alpha^i \beta^j \gamma^k, \\ \gamma &= \exp(i\lambda\omega\tau), \quad k = 1, 2,\end{aligned}$$

a on τ és la variable independent (el temps físic adequadament escalat), λ depèn de la onstant c_2 , i

$$\omega = 1 + \sum d_{ij} \alpha^i \beta^j,$$

juntament amb

$$\Delta = \sum f_{ij} \alpha^i \beta^j,$$

són quantitats que apareixen en el mètode de Lindstedt-Poincaré quan es busquen òrbites periòdiques.

Per a poder utilitzar per a l'objectiu de la missió del satèl·lit SOHO les òrbites de Lissajous, aquestes hauran d'evitar un cert con al voltant de la direcció Terra-Sol. Per raons de tipus tècnic l'angle mínim entre les rectes Terra-Sol i Terra-satèl·lit ha de ser superior a 3° .

D'altra banda també cal demanar que les desviacions màximes en les direccions y i z siguin el més petites possibles, a fi de minimitzar el cost de l'antena. L'amplitud màxima recomenada per a l'oscil·lació en la direcció y és de 26° . Això és possible aconseguir-ho amb òrbites Lissajous, però les òrbites passen per davant del disc solar degut a la diferència de fases. Per tot això les qüestions que cal resoldre són:

a) Durant quant de temps es manté una òrbita dins de la regió admissible.

b) Quin tipus de maniobra cal fer per evitar l'entrada en la regió de moviment no permesa.

A [2] es fa un estudi de la família bi-dimensional d'òrbites Lissajous i es mostra l'existència de solucions que verificant els requisits demanats estan dins de la regió admissible durant un període de temps d'aproximadament 4,5 anys, al cap d'aquest interval de temps cal realitzar una maniobra d'uns 150 m/s per a mantenir-la dins de la regió desitjada.

Al problema real les oscil·lacions quasi-periòdiques que cal afegir a les òrbites de Lissajous comportaran que el període entre dues maniobres haurà de ser una mica més petit que en el problema restringit i el consum de combustible probablement més gran.

En qualsevol cas aquest no és el tipus d'òrbita seleccionada com a nominal per l'ESA per al satèl·lit SOHO. L'òrbita triada ha estat una òrbita halo amb amplitud z

(β) igual a 0,08 (aproximadament 120.000 km), a la que a partir d'ara dedicarem la nostra atenció.

5. L'entorn de l'òrbita nominal

Per a conèixer la dinàmica al voltant d'una òrbita halo cal estudiar les equacions variacionals associades a les del problema restringit al llarg d'aquesta òrbita. Anomenarem $D\phi(\tau)$ al flux variacional.

L'estudi dels autovalors de la matriu de monodromia es pot fer numèric o analític (veure [1]). Per a òrbites halo d'amplitud moderada, els càlculs mostren l'existència de tres parelles amb el següent significat geomètric:

a) $\lambda_1 > 1$, $\lambda_2 < 1$, amb $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$. Aquesta parella està associada al caràcter hiperbòlic de l'òrbita. λ_1 és el vector propi dominant i el vector propi associat, $e_1(0)$, dona la direcció més expansiva. El vector $e_1(\tau) = D\phi(\tau) \cdot e_1(0)$ juntament amb el vector tangent a l'òrbita generen el pla tangent a la varietat invariant inestable local W_{loc}^u . Amb aquesta aproximació lineal es fa fàcil, integrant per a temps negatius, globalitzar la varietat inestable.

Fent ús de la simetria esmentada s'obté la direcció més contractiva, $e_2(\tau)$, i per tant la varietat estable.

b) $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$. Aquesta parella de valors propis està associada a variacions al llarg de l'òrbita (hi ha un vector propi, e_3 , tangent a l'òrbita) i a variacions al llarg de la família d'òrbites halo (variacions de l'energia o qualsevol altre magnitud equivalent).

Al llarg de l'òrbita els vector $e_3(\tau)$ i $e_4(\tau)$ generen una família de plans que són transportats l'un a l'altre pel flux variacional. La matriu de monodromia restringida a aquests plans té la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

amb $\varepsilon \neq 0$ degut a les variacions del període de les òrbites al llarg de la família.

c) La tercera parella la formen dos valors propis complexos conjugats de mòdul igual a la unitat. La matriu de monodromia restringida al pla generat per les parts real i imaginària dels corresponents vectors propis és una rotació.

A efectes pràctics resulta més convenient treballar amb els anomenats modes de Floquet, $\bar{e}_i(\tau)$, $i = 1, \dots, 6$ que amb els vectors $e_i(\tau)$. Les relacions que els lliguen, per exemple

$$\bar{e}_1(\tau) = e_1(\tau) \cdot \exp(-\tau \ln \lambda_1/T),$$

a on T és el període de l'òrbita halo, permeten recuperar els uns a partir dels altres.

6. El mètode de control

Quan ens ocupem del problema del manteniment del satèl·lit sobre una òrbita nominal, l'únic mode «perillós» és el primer. Per tant, el procediment de control té com idea bàsica la cancel·lació de la component inestable.

Sigui $\delta = (\delta x, \delta y, \delta z, \delta \dot{x}, \delta \dot{y}, \delta \dot{z})^T$ el vector error, és a dir la diferència entre les coordenades del satèl·lit i les nominals. En un instant, τ , δ es pot escriure en la base local definida pels modes de Floquet com

$$\delta = \sum_{i=1}^6 c_i \bar{e}_i(\tau).$$

La component, c_1 , al llarg de la direcció inestable la podem escriure com

$$c_1 = \frac{\det(\delta, \bar{e}_2(\tau), \dots, \bar{e}_6(\tau))}{\det(\bar{e}_1(\tau), \dots, \bar{e}_6(\tau))},$$

o, desenvolupant el determinant del numerador per la primera columna, com

$$c_1 = \pi_1(\tau)\delta x + \pi_2(\tau)\delta y + \pi_3(\tau)\delta z + \pi_4(\tau)\delta \dot{x} + \pi_5(\tau)\delta \dot{y} + \pi_6(\tau)\delta \dot{z},$$

Les magnituds $\pi_i(\tau)$ que apareixen en aquesta darrera expressió s'anomenen factors de projecció. $\pi_i(\tau)$ és el menor (amb signe), m_i , associat a l' i èsim element de la primera columna de la matriu que apareix al numerador de c_1 , dividit pel determinant de la base de Floquet.

Usant com a valors 2σ per als errors de seguiment (suposats normals amb mitjana zero) les quantitats 3 km, 5 km i 30 km en les direccions x , y i z , respectivament, i 2 mm/s, 2 mm/s i 6 mm/s en les corresponents components de la velocitat, el valor 2σ per a la component inestable deguda als errors de seguiment és, com a molt, 10^{-7} en unitats adimensionals. Per tant no cal fer cap maniobra per a cancel·lar la component inestable si aquesta és prou petita.

Les exploracions numèriques mostren que les maniobres òptimes no han d'incloure component z .

Definim els controls unitaris com el salt en velocitats que fa el satèl·lit per a cancel·lar una unitat (en variables normalitzades) de component inestable. Siguin Δ_1 i Δ_2 els controls unitaris al llarg de les direccions x i y respectivament. Si escrivim

$$\frac{\bar{e}_1(\tau)}{|\bar{e}_1(\tau)|} + (0, 0, 0, \Delta_1, \Delta_2, 0)^T = \sum_{k=2}^6 \alpha_k \bar{e}_k(\tau),$$

i minimitzem $\Delta_1^2 + \Delta_2^2$, s'arriba a:

$$\Delta_i = -\frac{\det(m_{i+3}(\tau))}{(m_4^2(\tau) + m_5^2(\tau)) \cdot |\bar{e}_1(\tau)|}, \quad i = 1, 2.$$

Es defineix la funció de guany per

$$g(\tau) = || \Delta(\tau) ||^{-1} .$$

Si es comparen els controls més útils: controls al pla (x, y) , controls en x i controls en y , es troba que el millor de tots ells és el primer i el pitjor de tots l'últim, amb un factor per al cost d'aproximadament 2 entre l'un i l'altre.

Una qüestió raonable és si resulta recomanable retardar l'execució d'una maniobra de control a l'espera d'una altra època per a la que el guany sigui millor. La funció de guany pot créixer però la component inestable també ho fa. Per això cal estudiar la funció

$$\frac{\exp((\ln \lambda_1 / T)\tau)}{g(\tau)} .$$

Els càlculs mostren que aquesta funció sempre és creixent, per tant no és mai bo esperar a fer una maniobra excepte que aquesta no es pugui dur a terme per motius operatius. De fet un retard curt no és greu.

D'aquesta manera tenim ja una idea de com realitzar el control quan considerem el problema real. Les modificacions que caldrà fer aleshores són més tècniques que conceptuals.

7. Equacions del moviment en el sistema solar

Per tot el que hem dit interessa poder escriure les equacions del moviment en el sistema solar real com a una pertorbació de les equacions del problema restringit. Per això cal introduir dos sistemes de referència. El primer, que anomenarem sistema adimensional, és una extensió natural del sistema que s'utilitza en el PRTC.

Anomenem \vec{e} i \vec{a} les coordenades d'un punt en el sistema eclíptic i adimensional, respectivament. El sistema eclíptic té l'origen en el centre de masses del sistema solar, l'eix x en la direcció del punt Aries, l'eix y en la direcció del punt Càncer i l'eix z completant un triedre trirectangle. Per anar d'un sistema a l'altre s'utilitza una transformació de la forma

$$\vec{e} = kC\vec{a} + \vec{b}$$

a on k és un factor de canvi d'escala, C és una matriu ortogonal i \vec{b} és una translació. Totes les variables que defineixen aquesta transformació són funció del temps.

El paràmetre \vec{b} es pot calcular fàcilment fent que sigui igual a la posició dels dos primaris respecte al centre de masses del sistema solar. El factor d'escala, k , es calcula de manera que la distància entre els dos primaris valgui la unitat. La determinació de la transformació ortogonal C comporta imposar que els dos primaris tinguin les mateixes coordenades que tenen en el problema restringit: $(\mu, 0, 0)$ el primari gran i $(\mu - 1, 0, 0)$ el petit i que la velocitat del primari petit respecte al gran tingui, en coordenades adimensionals, tercera component nul·la.

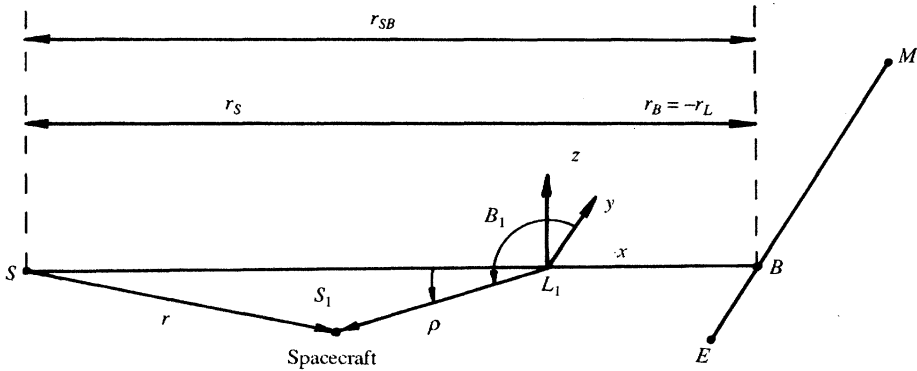


FIGURA 6.

Els punts geomètrics de libració ja hem dit que els definim de manera que en coordenades adimensionals tinguin les mateixes coordenades que els punts d'equilibri del problema restringit per al mateix valor del paràmetre de masses μ .

Per als punts col·lineals definim un segon sistema de referència, que anomenarem sistema normalitzat, centrat en el punt d'equilibri i amb els eixos tal com indica la figura 6.

En aquest sistema la distància del punt d'equilibri al primari més proper és igual a la unitat. Notem que el canvi de coordenades adimensionals a coordenades normalitzades és independent del temps.

Cal fer també un canvi de variable independent de manera que, com passa en el problema restringit, el període sideral mitjà del primari petit respecte al gran valgui 2π . Degut a que el moviment del cos petit respecte del gran no verifica la tercera llei de Kepler, cal modificar (poc) la massa del primari gran i considerar la resta de massa com una pertorbació.

Anomenarem \vec{R} , \vec{R}_S , \vec{R}_E , \vec{R}_M , \vec{R}_B i \vec{R}_{P_i} (resp. O , S , E , M , B , P_i) els vectors posició en el sistema de coordenades eclíptic (resp. les masses) del satèl·lit, el Sol, la Terra, la Lluna, el baricentre Terra-Lluna i el planeta ièsim, respectivament. Les equacions del moviment del satèl·lit són:

$$\ddot{\vec{R}} = G \sum_{A \in \{S, E, M, P_1, \dots, P_k\}} \frac{A(\vec{R}_A - \vec{R})}{|\vec{R}_A - \vec{R}|^3},$$

a on G és la constant de gravitació. La posició del Sol, \vec{R}_S , verifica una equació semblant. Si anomenem $\vec{r} = \vec{R} - \vec{R}_S$, $\vec{r}_{SA} = \vec{R}_A - \vec{R}_S$ l'equació diferencial per \vec{r} la podem deduir del Lagrangia:

$$L = \frac{1}{2} \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{G\tilde{S}}{|\vec{r}|} + \frac{G\tilde{S}}{|\vec{r}|} + \sum_{A \in \{E, M, P_1, \dots, P_k\}} GA \left(\frac{1}{|\vec{r}_{SA} - \vec{r}|} - \frac{\vec{r}_{SA} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}_{SA}|^3} \right),$$

o equivalentment de

$$L = \frac{1}{2} \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + K \left(\frac{1 - \mu_B}{|\vec{r}|} + \frac{\mu_{\tilde{S}}}{|\vec{r}|} \right) + K \sum_{A \in \{E, M, P_1, \dots, P_k\}} \mu_A \left(\frac{1}{|\vec{r}_{SA} - \vec{r}|} - \frac{\vec{r}_{SA} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}_{SA}|^3} \right),$$

a on $K = G(\bar{S} + E + M)$ i $\mu_A = A(\bar{S} + E + M)^{-1}$ per $A \in \{\bar{S}, \tilde{S}, E, M, P_1, \dots, P_k\}$. Notis que $\mu_{\bar{S}} = 1 - \mu_B$ a on $\mu_B + (E + M)(\bar{S} + E + M)^{-1}$. \bar{S} és la part de la massa del Sol utilitzada perquè es verifiqui la tercera llei de Kepler i la part restant, juntament amb el terme corresponent a la pressió de radiació solar és \tilde{S} .

Ara ja podem fer els canvis a coordenades adimensionals i normalitzades. En aquestes darreres coordenades el nou Lagrangiana és:

$$L = \frac{1}{2} \{k^2(x'^2 + y'^2 + z'^2) + 2kk'(xx' + yy' + zz') + 2k^2(E(xy' - yx') + F(yz' - zy')) + k'^2(x^2 + y^2 + z^2) + k^2(Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxz)\} - k'^2x_Sx - kk'x_Sx' - k^2(Ax_Sx + Dx_Sz) - k^2Ex_Ey' + Kk^{-1} \sum_{n \geq 2} c_n a^n P_n\left(\frac{x}{a}\right) + Kk^{-1}x_Sx + Kk^{-1}\gamma^{-3} \frac{\mu_{\tilde{S}}}{\tilde{r}_S} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{a}{\tilde{r}_S}\right)^n P_n(\cos S_1) + Kk^{-1}\gamma^{-3} \sum_{A \in P} i(A)\mu_A \left(-\frac{a \cos A_2}{\tilde{r}_{SA}^2} + \frac{1}{\tilde{r}_A} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{a}{\tilde{r}_A}\right)^n P_n(\cos A_1) \right),$$

a on $P = \{E, M, P_i, B\}$ i els vectors normalitzats duen una titlla. L'angle A_1 (resp. A_2) és el format per \vec{r}_A (resp. \vec{r}_{SA}) i a .

En aquestes equacions A, B, \dots, F són funcions que depenen de la longitud i la latitud del baricentre del sistema Terra-Lluna i provenen de les components de la matriu de canvi de coordenades C i les seves derivades.

A partir del Lagrangiana és ja possible escriure les equacions del moviment com:

$$x'' = 2y' + (1 + 2c_2)x + \sum_{n \geq 2} (n+1)c_{n+1}a^n P_n\left(\frac{x}{a}\right) + C(0) \sum_{n \geq 2} nc_n a^{n-1} P_n\left(\frac{x}{a}\right) + C(1)x + C(2)y + C(3)z + C(4)x' + C(5)y' + C(7) + Kk^{-3}\gamma^{-3} \mu_{\tilde{S}}(x - x_S) \sum_{n \geq 2} \frac{a^{n-2}}{x_S^{n+1}} \bar{P}_n(\cos S_1) + Kk^{-3}\gamma^{-3} \sum_{A \in P} i(A)\mu_A \left(-\frac{x_{SA}}{\tilde{r}_{SA}^3} + (x - x_A) \sum_{n \geq 2} \frac{a^{n-2}}{\tilde{r}_A^{n+1}} \bar{P}_n(\cos A_1) \right),$$

$$\begin{aligned}
y'' &= -2x' + (1 - c_2)y + y \sum_{n \geq 3} c_n a^{n-2} \bar{P}_n \left(\frac{x}{a} \right) + \\
&+ C(0)y \sum_{n \geq 2} c_n a^{n-2} \bar{P}_n \left(\frac{x}{a} \right) + \\
&+ C(11)x + C(12)y + C(13)z + C(14)x' + C(15)y' + C(16)z' + \\
&+ C(17) + K k^{-3} \gamma^{-3} \mu_S y \sum_{n \geq 2} \frac{a^{n-2}}{x_S^{n+1}} \bar{P}_n(\cos S_1) + \\
&+ K k^{-3} \gamma^{-3} \sum_{A \in \mathcal{P}} i(A) \mu_A \left(-\frac{y_{SA}}{\tilde{r}_{SA}^3} + (y - y_A) \sum_{n \geq 2} \frac{a^{n-2}}{\tilde{r}_{SA}^{n+1}} \bar{P}_n(\cos A_1) \right), \\
z'' &= -c_2 z + z \sum_{n \geq 3} c_n a^{n-2} \bar{P}_n \left(\frac{x}{a} \right) + \\
&+ C(0)z \sum_{n \geq 2} c_n a^{n-2} \bar{P}_n \left(\frac{x}{a} \right) + \\
&+ C(21)x + C(22)y + C(23)z + C(25)y' + C(26)z' + C(27) + \\
&+ K k^{-3} \gamma^{-3} \mu_S z \sum_{n \geq 2} \frac{a^{n-2}}{x_S^{n+1}} \bar{P}_n(\cos S_1) + \\
&+ K k^{-3} \gamma^{-3} \sum_{A \in \mathcal{P}} i(A) \mu_A \left(-\frac{z_{SA}}{\tilde{r}_{SA}^3} + (z - z_A) \sum_{n \geq 2} \frac{a^{n-2}}{\tilde{r}_{SA}^{n+1}} \bar{P}_n(\cos A_1) \right).
\end{aligned}$$

La ' en aquestes equacions indica la derivada respecte el temps normalitzat, P_n són els polinomis de Legendre, $P_n(\alpha) = -d(P_{n-1}(\alpha))/d\alpha$, i les funcions $C(i)$ son funcions que depenen del temps lligades al moviment no circular del primari petit respecte al gran. Cal remarcar que la primera línia de cada equació, és a dir, si suprimim les pertorbacions, les equacions que obtenim són les del problema restringit de tres cossos.

8. Òrbites halo al sistema solar

Al sistema solar les solucions periòdiques deixen d'existir i queden substituïdes per solucions quasi-periòdiques. Una solució quasi-periòdica es pot veure com la superposició de diferents harmònics amb freqüències incommensurables. Una òrbita halo queda substituïda per una solució quasi-periòdica propera.

És possible obtenir aquest darrer tipus de solucions tant per procediments analítics com numèrics. Aquí ens limitarem a descriure breument com es poden determinar numèricament per un procediment de tir paral·lel.

Direm que una òrbita quasi-periòdica té amplitud β si prové de refinar una òrbita halo periòdica de la mateixa amplitud.

Siguin $(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ el temps, la posició i la velocitat en coordenades normalitzades. Definim l'aplicació de Poincarè, \mathcal{P} , amb la superfície de secció $y = 0$, seguint el flux per a t creixent:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(t, x, y = 0, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) &= (\bar{t}, \bar{x}, \bar{z}, \bar{\dot{x}}, \bar{\dot{z}}) = \\ &= (\mathcal{P}_1(t, x, z, \dot{x}, \dot{z}), \dots, \mathcal{P}_6(t, x, z, \dot{x}, \dot{z})).\end{aligned}$$

La superfície de secció $y = 0$ marca els intervals que defineixen el tir paral·lel, en el sentit que cada interval del procediment està comprès entre dos talls consecutius amb aquesta superfície de secció.

Indicarem per $Q_i = (t_i, x_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i)$ el punt i èsim, en la partició de l'interval total en el que anem a calcular l'òrbita quasiperiòdica. Si el procediment de tir paral·lel es subdivideix en N subintervals, aleshores $i = 0, \dots, N$.

Per tant, d'entrada tenim $6(N + 1)$ variables lliures. S'ha de tenir en compte que triem l'instant inicial a partir del que comencem a calcular l'òrbita quasi-periòdica, i a més demanem que aquesta tingui una certa amplitud. Per tant fixem t_0, z_0 i el nombre de variables lliures (les components de Q) es redueix a $6N + 4$.

D'aquesta manera hem de menester $6N + 4$ equacions per a la determinació de les restants variables.

Un procediment de tir paral·lel ha de verificar les condicions de solapament:

$$F_{6i+j}(Q) = \mathcal{P}_j(Q_i) - (Q_{i+1})_j = 0, \quad j = 1, \dots, 6, \quad i = 0, \dots, N - 1,$$

a on F és el vector de $6N + 4$ equacions que ha de verificar la variable Q .

Les condicions de solapament donen $6N$ equacions. Les quatre restants es poden imposar de distintes maneres, que a la vegada donen lloc a diferents aproximacions de la solució quasiperiòdica.

Les que nosaltres hem pres són:

$$\begin{aligned}F_{6N+1} &= x_0 - x^t_0 - (x_N - x^t_N) &= 0, \\ F_{6N+2} &= z_N - z^t_N &= 0, \\ F_{6N+3} &= \pi_4(\dot{x}_0 - \dot{x}^t_0) + \pi_5(\dot{y}_0 - \dot{y}^t_0) + \pi_6(\dot{z}_0 - \dot{z}^t_0) &= 0, \\ F_{6N+4} &= \pi_4(\dot{x}_N - \dot{x}^t_N) + \pi_5(\dot{y}_N - \dot{y}^t_N) + \pi_6(\dot{z}_N - \dot{z}^t_N) &= 0,\end{aligned}$$

Aquí el superíndex t denota el valor pres per la solució quasiperiòdica analítica i π_4, π_5, π_6 són les tres darreres components dels factors de projecció sobre la component inestable de l'òrbita quasiperiòdica (veure [1]).

Resumint, el sistema d'equacions que cal resoldre és:

$$\begin{aligned}F_1(Q) &= \mathcal{P}_1(t_0, x_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) - t_1 &= 0, \\ F_2(Q) &= \mathcal{P}_2(t_0, x_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) - x_1 &= 0, \\ &\dots & \\ F_6(Q) &= \mathcal{P}_6(t_0, x_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) - \dot{z}_1 &= 0, \\ F_7(Q) &= \mathcal{P}_1(t_1, x_1, z_1, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1) - t_2 &= 0, \\ &\dots & \\ F_{6N}(Q) &= \mathcal{P}_6(t_{N-1}, x_{N-1}, z_{N-1}, \dot{x}_{N-1}, \dot{y}_{N-1}, \dot{z}_{N-1}) - \dot{z}_N &= 0, \\ F_{6N+1}(Q) &= x_0 - x^t_0 - (x_N - x^t_N) &= 0, \\ F_{6N+2}(Q) &= z_N - z^t_N &= 0, \\ F_{6N+3}(Q) &= \pi_4(\dot{x}_0 - \dot{x}^t_0) + \pi_5(\dot{y}_0 - \dot{y}^t_0) + \pi_6(\dot{z}_0 - \dot{z}^t_0) &= 0, \\ F_{6N+4}(Q) &= \pi_4(\dot{x}_N - \dot{x}^t_N) + \pi_5(\dot{y}_N - \dot{y}^t_N) + \pi_6(\dot{z}_N - \dot{z}^t_N) &= 0,\end{aligned}$$

a on

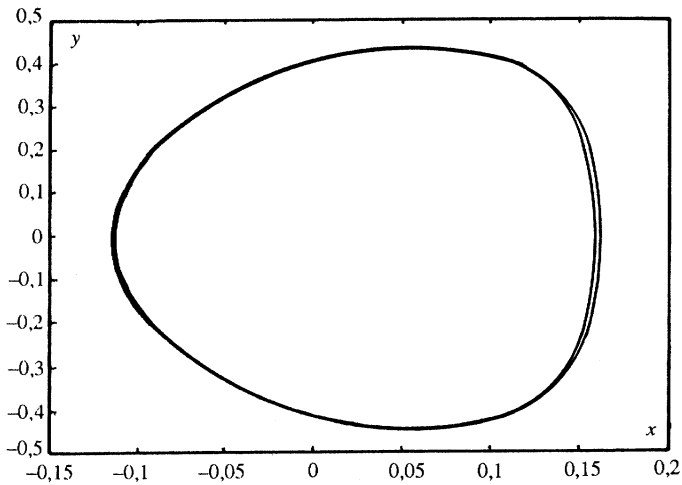
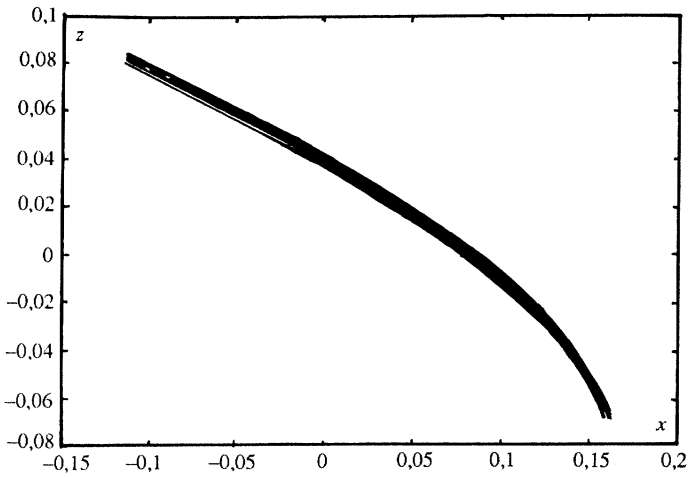
$$Q = (t_0, x_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, t_1, x_1, z_1, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, t_N, x_N, z_N, \dot{x}_N, \dot{y}_N, \dot{z}_N).$$

Si denotem el conjunt d'equacions per $F(Q) = 0$ i prenem com a condició inicial per a les variables $Q^{(0)}$, el mètode de Newton

$$DF(Q^{(j)})(Q^{(j+1)} - Q^{(j)}) = -F(Q^{(j)}),$$

permet arribar a la solució desitjada en unes poques iteracions.

La següent figura mostra les projeccions sobre els plans coordenats d'una òrbita quasi-periòdica d'amplitud 0,08.



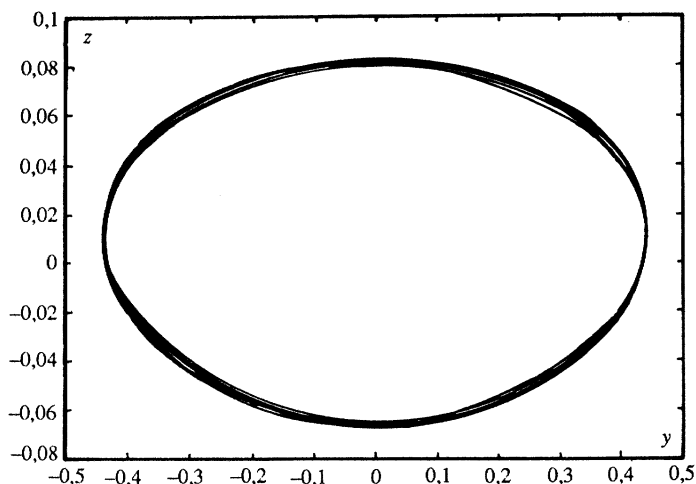


FIGURA 7.

9. Simulacions de control

El mètode emprat per al control al problema real és el que s'ha descrit per al problema restringit. Sols esmentarem aquí algunes qüestions tècniques d'interès i els resultats que s'obtenen.

A diferència de l'anomenat control continu, l'anomenat control on/off s'aconsegueix encenent i apagant uns motors durant un interval molt petit de temps. Podem doncs suposar que quan s'aplica un control el que es fa és sols un salt a l'espai de velocitats.

Tal com ja s'ha dit al parlar de les equacions en el problema real, la massa del Sol en aquestes equacions es modifica per tal de tenir en compte l'efecte de la pressió de radiació solar. Degut a la naturalesa d'aquest efecte cal afegir una certa component aleatòria a l'acceleració. Aquesta component consisteix d'una banda en un cert error relatiu en el mòdul de l'acceleració de la pressió de radiació solar, que es suposa distribuïda d'acord amb una certa llei normal amb desviació típica del 5%. D'altra banda cal també afegir errors tant en longitud com en la latitud eclíptiques de l'acceleració.

La simulació del control ha de modelar també els errors que en la realitat es tenen deguts al seguiment. D'aquesta manera, quan es comença la simulació, a una certa època inicial, es calcula el punt nominal. A aquest punt s'hi afegeixen variacions aleatòries en les seves sis components.

A cada pas de la integració es calcula la component inestable, que és la que ha de cancel·lar el procediment de control, tenint en compte que cal afegir un cert soroll que simuli els errors que es tenen en la vida real deguts al seguiment. De fet a cada instant

es tenen sempre tres punts: el real (que es desconeix), el nominal (sobre l'òrbita quasi-periòdica) i el que s'observa.

Ja s'ha esmentat que no és convenient realitzar una maniobra de control si la component inestable és molt petita, degut als errors del seguiment del satèl·lit. També és cert que cal evitar realitzar maniobres molt seguides, quant més gran sigui el temps entre dues maniobres més acurada serà la posició observada del satèl·lit. Per últim caldrà estar segurs que si la component inestable és més gran que una certa tolerància el satèl·lit s'està escapant per la varietat inestable, en el sentit que aquesta component creix, al cap d'un període en un factor λ_1 . Oscil·lacions al voltant de l'òrbita nominal podrien obligar-nos a realitzar maniobres no necessàries.

Fixant valors standard per a totes les magnituds, les simulacions numèriques fetes mostren que el control es pot dur a terme amb un consum de combustible de l'ordre de 20 cm/s per any. Aquesta quantitat és sensiblement inferior a la que va haver de menester l'ISEE-C que va utilitzar una estratègia de control diferent: no s'obligava al satèl·lit a seguir l'òrbita nominal sinó a mantenir-se en un entorn d'aquesta (d'altra banda l'òrbita nominal no era una solució del problema real sinó del PRTC).

10. Transferència des de la Terra a l'òrbita halo

Els càlculs de les òrbites de transferència des de la Terra fins a una òrbita halo es fan moltes vegades utilitzant mètodes de «prova i error»; es van canviar les condicions inicials de sortida des de la Terra fins que s'obtenen les òrbites de transferència que semblen més adequades. Altres vegades s'utilitza un algorisme optimitzador per al consum total de combustible, fixant per a la sortida des de la Terra alguns paràmetres d'una certa òrbita geostacionària de transferència i per l'arribada un cert tipus d'òrbita, deixant-se lliures la resta de paràmetres de l'òrbita geostacionària i el punt d'arribada a l'òrbita nominal. Aquests procediments, malgrat que poden arribar a trobar solucions molt bones per al problema, actuen com una caixa negra i estan molt lluny d'utilitzar la seva geometria que, com veurem, permet donar una aproximació més general i satisfactòria.

Típicament els resultats als que arriben els procediments esmentats consisteixen a fer una maniobra gran que injecta el satèl·lit a l'òrbita de transferència, una maniobra intermèdia per a corregir els errors de l'anterior i una maniobra final que injecta el satèl·lit a l'òrbita nominal.

La nostra aproximació al problema utilitza la varietat estable de l'òrbita halo nominal. Degut al caràcter fortament hiperbòlic d'aquesta, les òrbites sobre la varietat estable s'apropen ràpid a l'òrbita halo. Això comporta que si som capaços d'inserir al satèl·lit en una d'aquestes òrbites arribarà a uns pocs quilòmetres de l'òrbita halo en un interval de temps raonable.

Els passos que cal seguir per fer una anàlisi completa de la transferència són aquests:

- Donada una amplitud i una època inicial, t_0 , calcular l'òrbita halo. Aleshores la varietat estable local es pot aproximar integrant les equacions variacionals.
- La varietat estable s'ha de globalitzar, per integració tem'ps enrera, utilitzant les equacions del moviment en el sistema solar. Cal seleccionar aleshores quines òrbites de la varietat estable passen prop de la Terra i poden ser utilitzades per a la transferència.
- Un cop feta l'exploració preliminar de les òrbites utilitzables per a la transferència, cal fer-ne una tria. Per exemple, les òrbites que passen molt a prop de la Lluna han de ser rebutjades ja que les properes tenen una evolució posterior molt diferent les unes de les altres (pertorbació singular). Cal també excloure les òrbites que prop de la Terra tenen una alçada de perigeu molt gran o molt petita (de fet es troben solucions que arriben a xocar amb la Terra). El mateix és vàlid per a les òrbites que arriben a la Terra amb una inclinació equatorial molt gran.

D'aquesta manera podem triar totes les òrbites aptes per a la transferència i conèixer la quantitat de combustible (calculada com a increment de velocitat que cal donar al satèl·lit) necessària per a injectar al satèl·lit en la varietat estable, i ja sense més, aquest arribarà a l'òrbita halo.

El que presentarem aquí són els resultats obtinguts per a les òrbites quasi-periòdiques d'amplitud 0,08 (en unitats adimensionals) calculades per a èpoques inicials, que expressades en dies julians modificats, des de 1950.0, varien entre el 16470 (4-II-1995) i el 16705 (27-IX-1995).

En la figura 8 es mostren les finestres d'inserció. A l'eix d'abscisses s'han representat les distàncies al perigeu en quilòmetres i a l'eix d'ordenades els dies julians modificats menys 16462. S'observa que fixada una alçada de perigeu les finestres d'inserció admissibles estan formades per diferents intervals. A la figura sols n'apareixen dos. L'amplada d'aquests intervals és d'uns dos dies i aproximadament en tenim un cada mes.

Una ampliació de la banda inferior de la figura 8 es mostra a la figura 9. Aquesta darrera figura està, de fet, plena de corbes «horizontals». Cada corba horitzontal correspon a una òrbita halo calculada a partir d'una certa època inicial, t_0 . Al llarg de cadascuna d'aquestes corbes els punts s'obtenen canviant el paràmetre al llarg de l'òrbita. Fixada l'època inicial t_0 , cada corba talla dos vegades l'interval de perigeus comprès entre 6.400 i 7.000 km. Per exemple, a la part inferior dreta de la figura es pot veure un d'aquests mínims. Els altres mínims estan situats a l'esquerra, fora del rang d'interès.

A les següents figures hi trobem el següent. A la figura 10 s'ha representat la inclinació eclíptica, en graus, en lloc del dia julià modificat. Notis que una bona part de les solucions tenen una inclinació petita. Finalment a la figura 11 s'ha representat l'increment de velocitat (en m/s) que cal donar al perigeu per a inserir-se en una òrbita de transferència des d'una òrbita circular.

A la figura 12 es mostren les projeccions sobre el plans (x, y) , (x, z) i (y, z) d'una d'aquestes òrbites de transferència. L'òrbita halo d'arribada té una amplitud igual a 0,08 i una època inicial $t_0 = 16470$. L'instant d'inserció a l'òrbita de transferència és

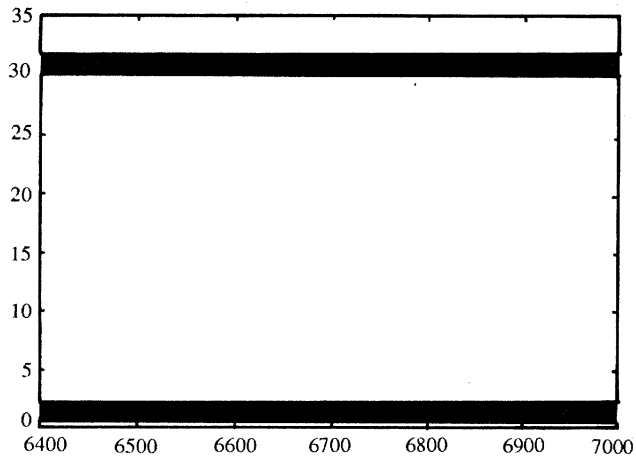


FIGURA 8.

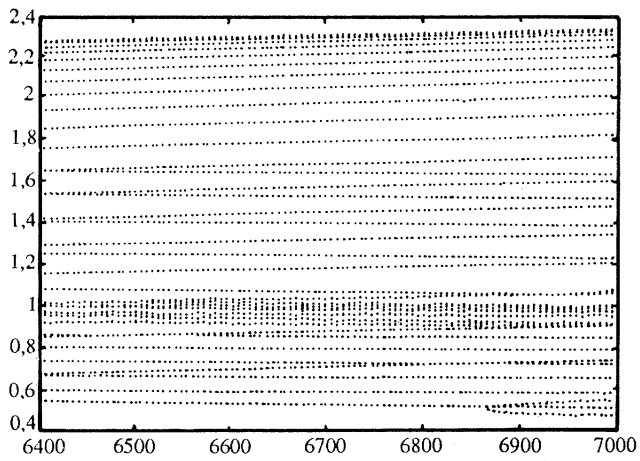


FIGURA 9.

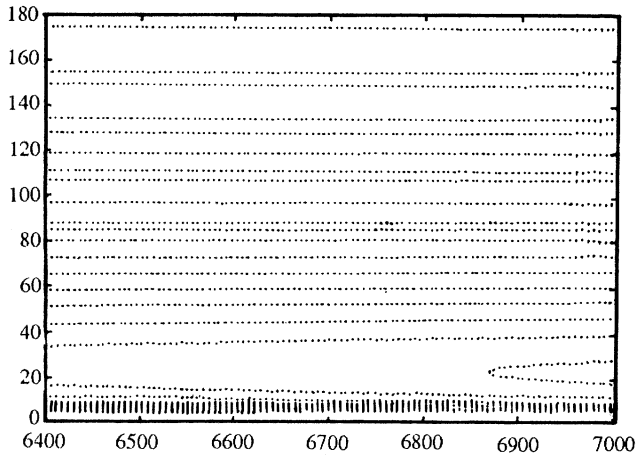


FIGURA 10.

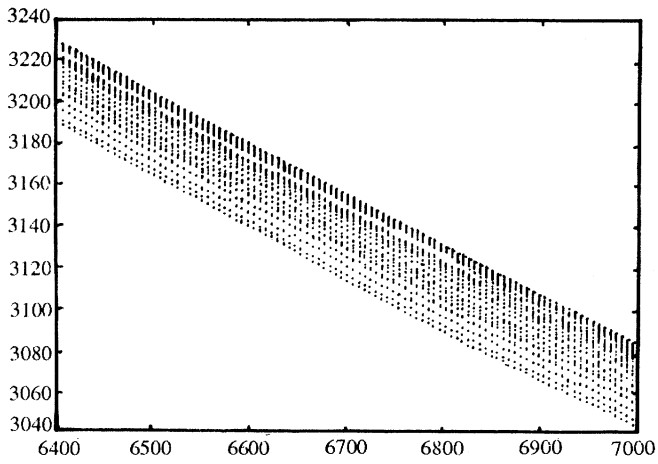


FIGURA 11.

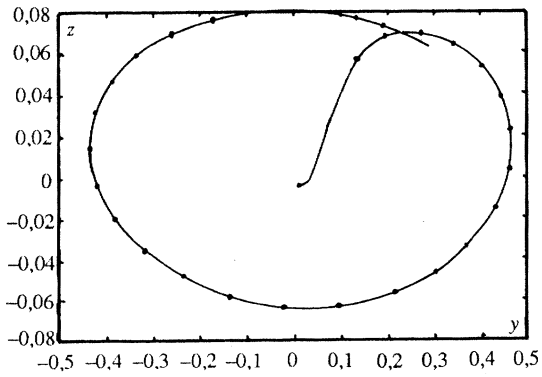
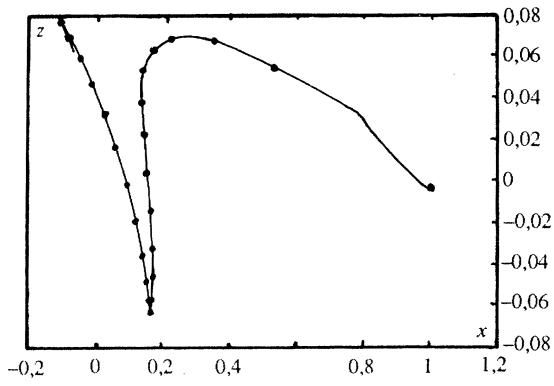
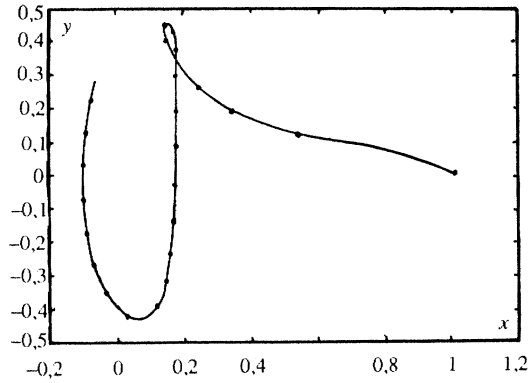


FIGURA 12.

el dia 16462.4603 i el de arribada a 197,5 km de distància de l'òrbita halo el 16670.5603. Les creus que apareixen al llarg de l'òrbita corresponen a intervals de 7 dies contats a partir de la inserció. A la segona projecció es pot observar clarament la influència de la Lluna sobre l'òrbita.

11. Referències

[1] G. Gómez, J. Llibre, R. Martínez, C. Simó: Station Keeping of Libration Point Orbits. ESOC Contract 5648/83/D/JS(SC), Final Report, 689 p., 1985.

[2] G. Gómez, A. Jorba, J. Masdemont, C. Simó: Study Refinement of Semi-Analytical Halo Orbit Theory. ESOC Contract 8625/89/D/MD(SC), Final report, 211 p., 1991.