

El paper del matemàtic enfront els problemes de l'educació matemàtica

Miguel de Guzmán*
Universitat Complutense de Madrid

En primer lloc voldria agrair la invitació per participar en un congrés que em sembla d'una importància extraordinària perquè probablement és la primera vegada, almenys al nostre país, que s'estudia al si de la comunitat matemàtica global un problema fonamental avui dia: el de les relacions de les matemàtiques amb l'educació matemàtica. I més tenint en compte que el nostre país està molt necessitat d'un diàleg profund entre matemàtics, ensenyants, docents en actiu i també teòrics de l'educació matemàtica, pel fet que alguns aspectes d'aquesta teoria no estan suficientment ben considerats.

Començaré emmarcant aquí el tema d'aquesta conferència una mica ambiciosa-ment. Estic segur que no podrem tractar aquí totes les qüestions que proposaré i que, de moment, simplement enunciaré, per poder estudiar després alguna de les que considero de major interès i importància.

En primer lloc, ¿qui és el matemàtic? Al meu títol hi ha la paraula «matemàtic», ¿de quin matemàtic es tracta? Fixem-nos que aquesta no és una denominació unívoca i per tant caldrà delimitar-la una mica. Hi ha raons per a les quals el matemàtic —un cop hàgim dilucidat qui és— s'endinsi en els problemes de l'educació matemàtica. ¿Quines poden ser aquestes raons? No voldria entrar aquí a fons en qüestions institucionals sinó més aviat en aquelles qüestions que es deriven de la mateixa naturalesa de les matemàtiques, de la naturalesa de l'ensenyament matemàtic i de la naturalesa de la nostra societat, de la qual en formen part l'educació i les mateixes matemàtiques. La feina específica del matemàtic, que també tindrem ocasió de delimitar una mica, ¿té quelcom a veure amb l'educació matemàtica? ¿En què consisteix la tasca de la comunitat matemàtica considerada en la seva globalitat? ¿Pot aportar quelcom peculiar el matemàtic que es dedica a la investigació matemàtica? ¿Quines són les tasques en les quals la seva labor podria ser més important o les que requereixen la seva intervenció? ¿Quines són les raons per les quals hi ha tan pocs matemàtics tècnics que de fet hi aportin o hi col·laborin eficaçment, especialment entre nosaltres? (Estic segur que en altres societats també es produeix aquest fenomen, però a la nos-

* Miguel de Guzmán és Catedràtic d'Anàlisi Matemàtica a la Universitat Complutense de Madrid, membre de la Real Academia de las Ciencias i President del ICMI (International Commission for Mathematics Instruction).

tra és particularment patent.) ¿Quins són els avantatges i els inconvenients d'aquesta situació? Al llarg de la història veurem com matemàtics eminents s'han preocupat molt ferventment pels problemes relacionats amb l'educació, tant per l'educació dels més joves com per la popularització del seu camp dins de la societat. ¿Quins són aquests bons exemples i quin ha estat el seu paper? ¿Quins són, finalment, els problemes sociològics en aquest context de relacions entre el matemàtic tècnic, el docent i el teòric de l'educació?

La comunitat matemàtica

Començant amb el primer tema, penso que la comunitat matemàtica és una espècie de subcultura heterogènia a través de la qual formem part de la nostra cultura en qualitat de matemàtics. I aquesta comunitat matemàtica, que potser podem considerar com un bloc, està realment molt escindida en diferents «tipus» de matemàtics.

Per una part, trobem el matemàtic tècnic: és aquell matemàtic que aprofundeix sobretot en els mètodes, en les tècniques pròpies de l'avenç de la ciència i tracta d'estendre els progressos de la matemàtica en diferents aspectes. Serà matemàtic-tècnic en matemàtica fonamental o en matemàtica aplicada, etc., i la seva activitat prioritària serà manejar les eines matemàtiques per a l'aprofundiment, investigació i extensió dels resultats matemàtics. Per altra banda hi ha el matemàtic docent que s'encarrega fonamentalment de la transmissió dels coneixements matemàtics adequats a cada nivell d'ensenyament. Després trobem el matemàtic teòric de l'educació, figura recent a la nostra comunitat matemàtica, si més no de forma institucionalment establerta. El seu paper pot ser l'estudiar, explorar, investigar els problemes que es deriven del procés de transmissió de la matemàtica. Un problema no gens senzill serà, per exemple, determinar d'entre les diferents vessants de què es compon la matemàtica (i que veurem a continuació) quines són les adequades per a la transmissió del coneixement matemàtic. Però hi ha, a més a més d'aquests tres, un altre tipus de matemàtic, més antic dins el nostre col·lectiu. És aquell que tracta de donar sentit a l'activitat matemàtica en relació amb els altres aspectes culturals de l'home (la seva filosofia, la seva història, etc.). El matemàtic divulgador serà, doncs, el matemàtic educador de la societat en general que tracta d'establir lligams amb les altres parts de la cultura humana. La matemàtica és un dels eixos de la cultura humana però hi ha moltes altres zones de la cultura humana. Aleshores cal que hi hagi un traspàs, una comunicació entre les diferents cultures i que no estiguin separades com ha passat moltes vegades. I probablement podríem continuar distingint diferents tipus de matemàtics...

La naturalesa de l'activitat matemàtica

L'objectiu d'aquest subsistema cultural que és la comunitat matemàtica és extraordinàriament polivalent. Al llarg de la història s'han pretès moltes coses diferents a

través de la matemàtica. Avui dia, el sentit i l'objectiu de la nostra matemàtica es podria definir com el seu desenvolupament en quant element de progrés cultural.

Probablement, com deia Whitehead, en el futur, si la cultura sobreviu uns altres dos mil anys, la característica més important serà la senyoria de la intel·lecció matemàtica. Si és així, significa que tenim a les nostres mans un procés realment important per a la humanitat en el futur. Serà aleshores interessant procurar entendre a fons què és la matemàtica en si mateixa, i interpretar la naturalesa de l'activitat matemàtica.

Penso que la matemàtica avui dia, i d'acord també amb Whitehead, es podria definir com una exploració de diferents complexitats o estructures de la realitat. Un pot pensar que això és una tasca comuna de qualsevol activitat científica, fins i tot filosòfica, o de qualsevol activitat que pretengui el progrés del coneixement de l'home. El que serà específic de les matemàtiques, serà la manera d'entendre aquesta realitat, la forma d'explorar-la, potser per tenir més domini sobre ella. Al meu parer aquesta forma consisteix en tres etapes diferents que explicitaré tot seguit.

Per començar, la iniciació d'una simbolització adequada de la realitat, aspecte que es presenta en qualsevol forma inicial de matematització del que és real.

El segon aspecte és la possible manipulació lògica d'aquests símbols matemàtics, amb els quals un s'acosta a la realitat, o que abstreu de la realitat de tal manera que obliga l'assentiment dels altres. Aquesta és, crec jo, una de les característiques del pensament grec, on la manipulació dels signes lògics permet allunyar-se una mica de la política de la força per encaminar-se vers l'ideal de la persuasió. Tal vegada l'arrel de la matemàtica, tal com l'entendem avui, la trobem entre els grecs per aquest ideal racional de la persuasió, per aquest nivell lògic precisament: el que es pretén no és imposar-se mitjançant la força bruta, sinó persuadir per lògica. Això en el món de les matemàtiques. Probablement els grecs van ser tan afeccionats a les matemàtiques perquè en elles hi van trobar un ideal de racionalitat.

En tercer lloc, a través de la manipulació lògica rigorosa s'intentarà assolir un domini efectiu, almenys de certs aspectes de la realitat. A vegades pensem, i crec que és un dels perills, que toda la realitat és matematitzable d'aquesta manera rigorosa. Però no obstant el que és cert i es fa patent al llarg de la història de la matemàtica és que ens condueix al domini, no de tots, però sí de certs aspectes de la realitat.

Anem ara a sostenir una mica aquesta visió de la matemàtica com a exploració de la complexitat, veient simplement com la matemàtica s'ha enfrontat amb diversos aspectes de la complexitat d'allò que és real i com d'aquesta confrontació sorgeixen els diferents camps de la matemàtica.

Cronològicament, el primer és probablement la confrontació amb la complexitat derivada de la multiplicitat, de la repetibilitat de la realitat. L'home s'enfronta en primer lloc a la noció d'un mateix, tracta d'entendre la multiplicitat que no li sembla caòtica, sinó simplement com un conjunt de coses semblants les unes a les altres i de les que finalment en podrà extreure el número. El domini que manté en un principi és el domini analògic, és el que té l'home primitiu davant la complexitat de la multiplicitat. El que es pot, doncs, és modelar-la: tantes osques en una pedra com caps de bestiar, etc.

Ve després el domini simbòlic, però allà encara no hi ha matemàtiques.

Després apareix un domini operatiu sobre aquests símbols, amb els quals ja es pot bastir un sistema lògic rigorós, així com sistemes de numeració operatius en el tractament de la complexitat del múltiple.

El desenvolupament de la geometria arriba quan l'home s'enfronta a la complexitat de la forma en les seves diferents facetes: des d'un principi manipulatiu que és el principi estètic —component estètica característica de la matemàtica— fins arribar a una abstracció de formes i de mesures, una representació de les figures de l'espai i finalment una teorització geomètrica, de la que se'n deriven nocions com adjacència, coincidència, ordenació, etc.

Un altre dels aspectes de la matemàtica, encara que se'n podrien afegir molts més, és el de l'enfrontament amb la complexitat del símbol, és a dir, el símbol sobre el símbol, i d'aquí en sorgirà l'àlgebra.

Al segle XVII ja existeixen les possibilitats conceptuals i tècniques (eines per mesurar el temps, instruments de mesura més adequats) per a què l'home matematitzant es pugui enfrontar amb la complexitat del canvi quantitatiu i de la causalitat, la medicació de les causes i efectes de les transformacions que es produeixen a la naturalesa, etc., complexitat que s'estudiarà a través de l'anàlisi o del càlcul infinitesimal.

Davant la complexitat de l'incertesa, l'home s'enfrontarà a la causalitat múltiple, amb les idees de probabilitat i estadística; la complexitat de l'estructura formal del pensament farà possible la lògica matemàtica; etc. Probablement, un dels aspectes interessants avui dia és l'enfrontament amb la complexitat de la naturalesa a causa del seu caràcter no lineal, que s'estudia a través de la teoria del caos, els sistemes dinàmics, etc., abordables actualment pel fet de disposar d'eines adequades com l'ordinador. ¿On anem? ¿Quin tipus de complexitat afrontarem en el futur? És possible que el repte més fort per a les matemàtiques sigui l'estudi (matematitzant si pot ser) de l'estructura global, i no solament formal, del pensament humà.

Les matemàtiques a la societat

En el procés que acabem de descriure, la matemàtica apareix com un camí d'exploració d'estructures cada vegada més fàcilment assequibles perquè es van construint les eines conceptuals i físiques per a fer-ho.

¿Què és el que busca la matemàtica? Per entendre una mica què és el que ha de fer el matemàtic a aquesta societat i quina relació tindrà amb l'educació, jo diria que la matemàtica busca un coneixement-ciència:

- la veritat sobre la realitat, un coneixement sistemàtic sobre les situacions externes;
- el domini, és a dir, una aplicació d'aquesta ciència amb la finalitat d'adquirir, en la mesura que sigui possible, un cert domini sobre la naturalesa;
- el matemàtic persegueix, a través de la seva tasca, la construcció d'una cosmovisió, aspecte determinant de l'avenir de la matemàtica si hem de jutjar per la història;
- i finalment un coneixement que sigui alhora bellesa, art, joc i aventura.

Aquestes diferents facetes mostren el caràcter polivalent de la matemàtica, caràcter que, per la seva amplitud, és la causa d'una de les majors dificultats de l'ensenyament de les matemàtiques en el moment d'elegir quina d'aquestes facetes s'ha de transmetre.

Cal dir que la permanència i avenç de l'esperit matemàtic no afecta només els matemàtics: la matemàtica és un bé que depèn de tota la societat i és la societat qui li permet sobreviure. Alhora el progrés cultural de la societat depèn en gran part d'aquesta subcultura que és la matemàtica. Així és que hi ha una contrapartida: no som els matemàtics qui rebem de la societat, sinó la societat qui rep de nosaltres. La transmissió de l'esperit i de les tècniques matemàtiques a la posteritat és tasca general de la comunitat matemàtica. Aquest compromís global ens obliga a investigar i a aprofundir sobre allò que els nostres avantpassats ens han lliurat i que nosaltres entregarem als nostres successors; ens obliga a l'ensenyament com entrega directa d'aquests coneixements; i a la divulgació com a expansió de les matemàtiques des de la nostra comunitat a la resta de la cultura humana.

El matemàtic tècnic i l'ensenyament de les matemàtiques

Voldria ara dedicar la resta d'aquesta conferència a les següents preguntes: ¿Què pot representar l'ensenyament per al matemàtic tècnic? ¿Què pot representar que el matemàtic tècnic es trobi involucrat en els problemes d'ensenyament? ¿Quines són les seves possibles aportacions en aquest context?

Caldrà distingir diferents vessants en les possibles respostes a aquestes qüestions:

- el paper de l'ensenyament del matemàtic tècnic;
- la seva intervenció en el procés d'inculturació;
- la seva aportació en el contingut conceptual de l'ensenyament com a resposta a la pregunta ¿què ensenyar?;
- la necessitat d'adquirir una visió global de la matemàtica;

i, finalment, la necessitat de col·laboració del matemàtic tècnic amb els ensenyaments dels diversos nivells i amb els teòrics de l'educació.

Indicarem a continuació, a partir d'alguns exemples concrets, les possibles tasques del matemàtic tècnic en aquest sentit, deixant oberta la pregunta com ho fem i com ho podem millorar.

El paper de la tasca docent del matemàtic tècnic

Per al matemàtic tècnic, l'ensenyament és un estímul per penetrar amb més profunditat en la seva tasca d'investigador: la seva tasca docent no solament li permet complir amb la seva funció com a transmissor de coneixements sinó que també li

proporciona eines per a la seva pròpia investigació. El mateix Halmos explica com, a causa de la seva mala memòria, es veu obligat a aprendre novament tot allò que ha d'ensenyar, cosa que li permet assolir un nivell de profundització que no aconseguiria d'una altra manera. ¡I quantes vegades, jo mateix, en voler ensenyar quelcom que em semblava saber molt bé, he hagut de treballar per entendre-ho més profundament i poder-ho explicar millor! *Ensenyar per aprendre*, i al mateix temps relativitzar la nostra saviesa per aconseguir major dosi d'humilitat i comprensió vers els nostres alumnes.

Littlewood explica en el llibre *Miscel·lània matemàtica* un altre exemple il·lustratiu d'aquesta interacció entre la tasca docent i la investigació matemàtica: ¡Marcel Riesz va trobar la demostració d'un teorema d'anàlisi harmònica tot preparant un examen per als seus alumnes!

El teorema es el següent:

Si $f(z) = u + iv$ és analítica en $|z| \leq 1$ i $f(0) = 0$, aleshores:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |v|^4 d\theta \leq A \int_{-\pi}^{\pi} |u|^4 d\theta$$

Riesz va demostrar aquest resultat en manipular la integral $\int_{-\pi}^{\pi} f^4$ amb l'objectiu de trobar algun problema per a l'examen. Va veure aleshores que, en ser f^4 analítica,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^4 d\theta = 0, \text{ i doncs, que:}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} v^4 d\theta = -\int_{-\pi}^{\pi} u^4 d\theta + 6 \int_{-\pi}^{\pi} u^2 v^2 d\theta, \text{ d'on:}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} v^4 d\theta \leq \int_{-\pi}^{\pi} u^4 d\theta + 6 \left(\int_{-\pi}^{\pi} u^4 d\theta \int_{-\pi}^{\pi} v^4 d\theta \right)^{1/2} \text{ d'on en resulta el teorema.}$$

La intervenció del matemàtic tècnic en el procés d'inculturació

L'objectiu de l'ensenyament de la matemàtica és la transmissió de l'*esperit matemàtic*, de la manera peculiar com el matemàtic afronta la complexitat del que és real; i aquest esperit és el més enriquidor que pot aportar el matemàtic que es dedica a la investigació i que cada dia ho viu en la seva pròpia activitat. Al mateix temps, aquesta transmissió es fa mitjançant la *inculturació*, és a dir, introduint els alumnes a la subcultura dels matemàtics i fent-los viure la seva manera de fer les coses. Aquest és el paper del docent de qualsevol nivell, que ha de ser, a la seva manera i en el tractament dels seus temes, un profund coneixedor i practicant del procés de matematzació.

El contingut conceptual

A cada generació li correspon resoldre el seu propi problema de renovació dels continguts que s'ensenyen. En una situació com l'actual, de profunds convvis en l'ensenyament, el més essencial a l'hora d'estructurar els nous continguts rau en una bona comprensió de l'estructura conceptual de l'edifici matemàtic. En aquest aspecte, el matemàtic tècnic hi té un paper a jugar, ja que per aquesta comesa cal tenir una

visió temporal i global de la matemàtica, així com, qualsevol arquitecte, ha de poder distingir allò que és essencial del que és accessori d'aquest edifici. De la mateixa manera, si el que es pretén és transmetre un afer matemàtic, el més important serà la comprensió dinàmica del funcionament del pensament matemàtic; en aquest sentit el matemàtic que s'ha ocupat activament de la creació és una de les persones més capacitades per fer-ho, o si més no és algú de qui caldrà tenir en compte la seva experiència.

Vers una visió global de la matemàtica

Una tasca important a realitzar consisteix en mirar de clarificar el sentit profund de l'activitat matemàtica. En l'actualitat, la major part dels matemàtics som generalment com simples manobres, tècnics d'un trosset de l'edifici global de la nostra matemàtica. Hauríem de mirar de propiciar que entre nosaltres hi haguessin molts veritables arquitectes de les nostres estructures matemàtiques, a poder ser tots, que entenguin el sentit global de la nostra activitat i que visquin aquest sentit i el sàpiguen transmetre. El seu lloc a la ciència, el seu lloc a la cultura, en el pensament filosòfic, artístic... Aquesta tasca la poden realitzar possiblement moltes persones, però els matemàtics professionals no han de deixar d'aportar-hi la seva part, ja que tenen una visió específica que s'ha de considerar prevalent. I això no tan sols per l'interès pel progrés de la cultura humana, sinó també per raons egoistes. S'ha considerat moltes vegades com un misteri el fenomen de profunda decadència que va patir la matemàtica després de la florida de l'escola alexandrina. Tal vegada podríem dir que aquesta decadència va tenir com a una de les causes importants la tendència excessiva vers una especialització molt restringida de matemàtics, com ara Euclides i Apol·loni, en contrast amb la immersió de la matemàtica en una cosmovisió més generalista dels pitagòrics dels segles precedents. Una adequada simbiosi d'habilitat tècnica i saviesa global al voltant del lloc que la matemàtica hauria d'ocupar, hauria de ser l'objectiu global del matemàtic per a un sa desenvolupament de la seva ciència.

La necessitat de col.laboració del matemàtic amb els ensenyaments d'altres nivells

És clar que el matemàtic ocupat en la investigació tècnica d'un camp concret de la matemàtica no pot tractar de resoldre els problemes de l'ensenyament a nivell inicial. Li falta un element essencial per a fer-ho. El coneixement de prop de la situació dels alumnes a qui va dirigit aquest ensenyament. Encara que conegui bé el camp, probablement no coneix bé les persones a qui s'ha de dirigir, encara que només sigui pel fet de no estar en contacte amb elles, amb qui aquí i ara van a rebre aquest ensenyament. Per això, la seva actuació, en aquest cas concret, depèn d'una estreta col.laboració amb qui està a prop dels estudiants d'aquesta etapa. Així com podria, si tingués suficient sensibilitat per apreciar la manera de veure les coses d'altres persones, fer un bon disseny de l'ensenyament universitari, al menys en un camp concret, el camp de la seva especialitat, no obstant fins i tot tenint el coneixement adequat per

dissenyar correctament un curs de segon o de primer ensenyament, no ho pot fer per si mateix, per no estar en contacte directe amb qui l'ha de rebre. L'ensenyament no és només traspasar un contingut, sinó una transmissió de coneixements molt essencialment a qui ho rep. Quan intento comunicar la meua manera de veure les coses a una altra persona, una condició essencial és que jo li parli en una llengua que ella entengui de manera que sigui capaç d'assimilar i rebre el que jo li dic.

El professor d'altres nivells ha d'aportar el seu coneixement proper i vital de l'alumne que li correspon. Pel fet d'estar en contacte amb ells té l'ocasió de percebre més bé que ningú la conveniència i l'oportunitat de començar enfocant d'una o altra manera els problemes matemàtics que l'alumne d'aquest nivell és capaç de prendre's amb interès i treure'n profit, així com l'actuació, manipulació, conceptualització, maneig de rutines que més atreguin els estudiants que té davant.

Bons exemples. Diversitat de formes

Al llarg de la història de la matemàtica hi ha hagut un bon nombre de matemàtics de primera categoria que s'han ocupat amb gran interès i influència pels problemes de la transmissió del pensament matemàtic. I això des de diferents perspectives, totes elles valuoses.

Alguns, com per exemple Descartes, especialment a través del seus *Regulae ad directionem ingenii*, s'han esforçat per aplicar els mètodes del pensament matemàtic als problemes generals del pensament. i han procurat proporcionar a l'home una eina més eficaç per al tractament dels seus problemes científics, filosòfics, etc. Avui dia, la gran figura matemàtica que ha seguit l'estel·la de Descartes ha estat G. Polya, el gran renovador de l'ensenyament matemàtic a través del *problem solving*.

Molts altres matemàtics han treballat eficaçment per presentar models d'ensenyament i transmissió de diferents aspectes de la matemàtica i a diversos nivells. Es podria fer una llarga llista de matemàtics del nostre segle, que han tingut aquest interès. Podríem encapçalar aquesta llista amb els noms de Klein, Lebesgue, Hilbert, Hadamard, Weyl..., i al nostre país Rey Pastor, Puig Adam, Santaló...

Uns altres s'han esforçat, a vegades amb gran èxit, per fer patents a un ampli sector de la societat els valors culturals de la matemàtica. Caldria destacar entre els matemàtics importants del nostre segle Poincaré, entre els antics, i P. Davis, entre els actuals.

Avui dia a la comunitat matemàtica d'Estats Units s'observa clarament una forta tendència a la participació activa dels matemàtics tècnics, dels investigadors, en els gravíssims problemes que l'ensenyament matemàtic té en aquell país.

Possibles tasques concretes

Entre els treballs concrets amb què els matemàtics podrien col·laborar profitosament, voldria mencionar unes quantes tasques ben concretes, on la seva ajuda podria ser de gran valor:

- disseny de cursos de matemàtiques que aprofitin a fons la presència dels mitjans informàtics de què disposem actualment;
- incorporació ben estudiada i calibrada de diferents temes de la matemàtica discreta a diferents nivells;
- col·laboració efectiva per tractar de reincorporar eficaçment la geometria als diferents nivells elementals de l'ensenyament de la matemàtica (encara no queda gens clar quin tipus de geometria s'ha d'introduir, ni quina forma de tractament pot ser l'adequada);
- com fer de la informàtica i de l'ordinador quelcom veritablement útil i formatiu a nivell elemental.

I, finalment, una visió del desenvolupament de diferents aspectes de les matemàtiques recents, lúcida, útil i assequible a una bona part de la comunitat matemàtica, que fos aprofitable per a un bon nombre de professors d'altres nivells, per a tenir idees clares sobre les tendències i objectius de la investigació matemàtica. Seria excel·lent que un modern Klein escrivís avui dia alguna cosa així com «Matemàtica superior des d'un punt de vista elemental».