

LA INTRODUCCIÓ DEL CÀLCUL DIFERENCIAL A L'ESPANYA DEL SEGLE XVIII. TOMÀS CERDÀ I LA TEORIA DE FLUXIONS

JOAQUIM BERENGUER CLARIÀ

CENTRE DE RECERCA PER A LA HISTÒRIA DE LA TÈCNICA.

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA.

Resum: La nostra recerca està centrada en el desenvolupament i la difusió del càlcul diferencial i integral a l'Espanya del segle XVIII. La nostra tesi gira al voltant de la recepció d'aquest nou càlcul a Espanya a través de Tomàs Cerdà (1715-1791). Cerdà va ser un jesuïta català dedicat a l'ensenyament de les matemàtiques a Barcelona i a Madrid, a mitjans del segle XVIII, que va publicar diversos textos matemàtics i en va preparar molts d'altres per a la seva futura publicació. Un d'aquests manuscrits és un tractat sobre càlcul diferencial, el Tratado de Fluxiones, que és una adaptació d'un altre llibre, The Doctrine and Application of Fluxions (1750), del matemàtic anglès Thomas Simpson (1710-1761). De manera que l'objectiu d'aquest article és presentar les principals conclusions de l'anàlisi del paper de Cerdà en la introducció del càlcul diferencial i integral a l'Espanya del segle XVIII, a partir el seu Tratado de Fluxiones.

Paraules clau: Tomàs Cerdà, fluxions; segle XVIII; càlcul diferencial i integral

The introduction of differential calculus in XVIIIth-century Spain. Tomàs Cerdà and the theory of fluxions

Summary: Our research concerns eighteenth century Spain and is focused on the development and diffusion of Differential and Integral Calculus. Our thesis focus on the reception of this new calculus into Spain, through Tomàs Cerdà (1715-1791).

Cerdà was a Catalan Jesuit devoted to the teaching of mathematics in Barcelona and Madrid, in the mid-eighteenth century, and who published several mathematical texts

* Correspondència: JOAQUIM BERENGUER CLARIÀ

jberenguer90@gmail.com

and prepared many others for future publication. One of these manuscripts is a treatise on Differential Calculus, the Tratado de Fluxiones, which is an adaptation of another book, The Doctrine and Application of Fluxions (1750) by an English mathematician, Thomas Simpson (1710-1761). Thus, the aim of this paper centers on the analysis of the role of Cerdà in the introduction of Differential and Integral Calculus in eighteenth Century Spain, by means his Tratado de Fluxiones.

Keywords: Tomàs Cerdà, XVIIIth century, Fluxions, Differential Calculus

1. Introducció

La nostra recerca¹ se situa en l'Espanya del segle XVIII i està centrada en una de les branques matemàtiques que havia tingut els seus inicis a l'Europa de finals del segle XVII, és a dir, el càlcul diferencial i integral o el càlcul de fluxions, com es va denominar a la Gran Bretanya. Són nombrosos els historiadors² que han estudiat els orígens del càlcul i el seu desenvolupament durant el segle XVIII, i en la nostra recent tesi,³ sense pretendre reproduir l'anàlisi de la situació del càlcul diferencial i integral a l'Europa del segle XVIII, hem volgut emfatitzar aquells aspectes que potser, de vegades, han quedat més amagats. Ens estem referint al paper que van tenir autors de «segona fila», particularment el dels ensenyants i els seus textos, a l'hora de configurar el càlcul com a nou camp disciplinari. És així que la nostra recerca ha posat l'atenció en la recepció d'aquest nou càlcul a Espanya a través de Tomàs Cerdà (1715-1791). Per descomptat hi ha hagut excel·lents estudis sobre l'aparició del càlcul diferencial i integral al segle XVIII espanyol de la mà de diferents historiadors,⁴ però pensem que el tema continua estant molt obert i necessitat de major atenció, des del moment que aquests estudis, en general, no sempre han tingut com a principal tema el càlcul diferencial i integral pròpiament dit.

Cerdà va publicar diversos textos matemàtics i en va preparar molts d'altres —que s'han conservat en forma de manuscrits— per a una futura publicació. Un d'aquests textos és un tractat sobre càlcul diferencial, el *Tratado de Fluxiones*, que és una adaptació d'un altre llibre, *The Doctrine and Application of Fluxions* (1750), d'un matemàtic britànic, Thomas Simpson (1710-1761). El principal objectiu de la nostra tesi ha estat analitzar el paper de Cerdà en la introducció del càlcul diferencial i integral a Espanya, a partir d'aquest tractat, i és entorn d'aquest objectiu que també hem vertebrat l'article que ara es

1. Cal incloure la nostra recerca dins el projecte HAR2016-75871-R: «Matemáticas e Ingeniería: Nuevas perspectivas críticas (siglos XVI-XX)», dirigit per Antoni Roca-Rosell i Maria Rosa Massa-Esteve. Centre de Recerca per a la Història de la Tècnica. Universitat Politècnica de Catalunya.

2. Bos (1974, 1980), Guicciardini (1989, 1999, 2009), Knobloch (1990, 2002, 2004), entre d'altres.

3. Berenguer (2016).

4. Ausejo *et al.* (2010), Blanco Abellán (2013), Cuesta Dutari (1976-1983), Garma Pons (2002), Navarro Loidi (2013b).

publica, on presentarem les principals conclusions de la nostra recerca sobre l'aportació de Cerdà.

Tomàs Cerdà va ser un home del seu temps i, per tant, cal situar les seves aportacions en el camp de les matemàtiques, així com la seva pràctica docent, en el seu context històric i local. Per altra banda, Simpson, el llibre del qual va servir de model a Cerdà per escriure el seu tractat, va ser també un matemàtic i docent que va exercir una forta influència entre els matemàtics de la seva època. Per aquest motiu, en aquest article començarem per dibuixar, encara que sigui succintament, les figures de Cerdà i Simpson, com a professors i com a matemàtics, dins el context ampli de la situació de la ciència a l'Espanya i a l'Europa del segle XVIII. A continuació presentarem les conclusions més significatives sobre l'estructura del text de Cerdà, partint de la constatació que el principal referent del *Tratado de Fluxiones* és *The Doctrine and Application of fluxions* de Simpson. Finalment, l'article se centrarà a mostrar, a partir del cos conceptual adoptat i d'alguns exemples, la particular aportació de Cerdà en un tractat que, tot i ser un text situat sota la visió geomètrico-cinemàtica newtoniana, conté significatius elements del corrent leibnizià que el fan, per aquest motiu, especialment rellevant.

2. Simpson i Cerdà: professors de matemàtiques

En aquest capítol ressenyarem l'obra i la pràctica docent dels dos matemàtics que, cadascun en el seu context local, van dedicar la seva vida a l'ensenyament de les matemàtiques.

Cerdà: la primera càtedra pública de matemàtiques a Barcelona

Cerdà va nàixer a Tarragona el 1715. Va entrar a la Companyia de Jesús i en els seus primers anys de vida professional va donar classes de teologia i filosofia. El 1750 va ser enviat a la Universitat de Cervera com a professor de filosofia fins al 1753, mostrant una particular inclinació cap a les matemàtiques i la física experimental durant la seva estada en aquesta universitat. A principis de 1754 la Companyia de Jesús⁵ va decidir enviar Cerdà a Marsella, per actualitzar-se en relació amb els nous corrents científics europeus. Cerdà va estar al voltant de tres anys a l'observatori astronòmic de la Marina de Marsella, el director del qual era Esprit Pézenas (1692-1776). Aquest darrer, entre altres coses, va ser el traductor de l'anglès al francès de diferents tractats científics, un dels quals és *The Elements of the Method of Fluxions* de Colin Maclaurin (1692-1756), per tant, un bon coneixedor del càlcul diferencial a Europa. Probablement durant l'estada a Marsella, Cerdà va tenir accés a diferents textos matemàtics que en aquell moment circulaven per Europa, i de la mà de Pézenas va entrar de ple en contacte amb el càlcul diferencial.

5. El paper que van tenir els jesuïtes en el desenvolupament de la ciència a l'Espanya dels segles XVII i XVIII ha estat analitzat per diversos autors, entre els quals són de destacar Víctor Navarro Brotóns (2001) i Agustín Udías (2005, 2010).

Immediatament després de Marsella, Cerdà es va incorporar com a professor del Col·legi de Cordelles, un col·legi gestionat pels jesuïtes a Barcelona, per ocupar la càtedra pública que havia estat concedida pel rei Ferran VI. Les classes de matemàtiques es van obrir no solament als nobles, sinó també a les capes d'artesans o de professions liberals ciutadanes i, efectivament, els alumnes que Cerdà va tenir eren de diferents orígens socials: nobles, artesans, professionals liberals i eclesiàstics. Des d'aquest moment i durant més d'un segle,⁶ més enllà de la mateixa existència del col·legi de Cordelles, a Barcelona va existir aquesta càtedra de matemàtiques.

L'arribada de Cerdà a Cordelles havia de significar un canvi significatiu en el funcionament de l'escola i un canvi d'imatge d'aquesta davant la societat barcelonina. Això es deixa entreveure en algunes ressenyes d'«Actos académicos» de final de curs en el Col·legi de Cordelles, a partir de l'arribada de Cerdà, on es posa en relleu la utilitat de les matemàtiques i de la física experimental. El nou esperit impulsat per Cerdà en l'ensenyament va conduir a la creació de la Conferència Físico-Matemàtica, embrió de la Reial Acadèmia de Ciències i Arts de Barcelona, institució que, des del seu inici, va promoure les matemàtiques, la física experimental i, en general, les ciències aplicades a diversos camps de la societat.⁷

Durant l'estada a Cordelles, Cerdà va publicar dos textos que, com ell mateix diu, van ser els manuals que va utilitzar a les seves classes. El primer d'aquests es tracta de *Liciones de Matemática o Elementos Generales de Arithmética y Algebra para el uso de la clase* publicat el 1758. Dos anys després, el 1760, Cerdà va publicar la seva segona obra, *Lecciones de matematica o Elementos generales de Geometria para el uso de la clase*. Però la intenció de Cerdà anava més enllà d'escriure un tractat d'àlgebra i un altre de geometria. El matemàtic català va manifestar la voluntat d'escriure diversos tractats, un dels quals és el *Tratado de Fluxiones*. Efectivament, alguns historiadors,⁸ a partir dels anys setanta del segle XX, van descobrir diversos manuscrits de Cerdà conservats a la Real Academia de Historia de Madrid i van iniciar la seva anàlisi. De totes aquestes anàlisis i dels resultats aconseguits a partir de la nostra pròpia recerca es pot concloure que han estat identificats, en la Real Academia de Historia de Madrid, els tractats de Cerdà sobre *Fluxiones, Astronomía, Tratado de Tiro, Mecánica, Secciones cónicas, De la Aplicación del Álgebra a la Geometría, Óptica, Hidrostática, Hidráulica, Neumática i Navegación*. Abans de deixar el Col·legi de Cordelles, el 1764, Cerdà encara va publicar un tercer llibre sobre matemàtiques aplicades a l'artilleria, *Lección de*

6. El 1870 es tanquen les classes de matemàtiques de l'Acadèmia de Ciències i Arts, que és la institució que havia heretat la càtedra de matemàtiques creada el 1757.

7. Són diversos els historiadors que han estudiat el desenvolupament de la ciència i la tècnica a Barcelona durant els segles XVIII i XIX. Citem les aportacions de Massa-Esteve *et al.* (2011), Puig-Pla (2006) i Roca-Rosell (2014). Per conèixer el paper desenvolupat per Cerdà en els orígens de la Reial Acadèmia de Ciències i Arts, vegeu García Doncel (1998).

8. Cuesta Dutari (1976-1983), Garma Pons (1978, 2002), Hernández Alonso (1973).

Artillería para el uso de la clase, elaborat expressament per al seu ús en la Real Academia de Artillería de Segovia, acabada de crear.⁹

Però Cerdà no va anar a Segòvia, sinó a Madrid, i es va convertir en el primer professor de matemàtiques en el Colegio Imperial de Madrid, principal col·legi de la Companyia de Jesús a Espanya. Aquest càrrec estava associat al de cosmògraf major de les Índies i probablement al de preceptor dels prínceps. Cerdà va ocupar aquests càrrecs fins al 1767, quan es va produir l'expulsió dels jesuïtes d'Espanya. Un cop a l'exili, es va instal·lar a la ciutat italiana de Forlì i va morir el 1791.

Simpson: un matemàtic autodidacte¹⁰

Thomas Simpson va néixer a Market Bosworth, en el comtat de Leicester (Gran Bretanya), el 1710, i estava destinat a treballar en el ram del tèxtil on el seu pare era teixidor. Per tant, l'educació de Simpson no va ser diferent de la de qualsevol fill d'artesà. Però el seu interès per les matemàtiques es va despertar ben aviat i des de 1725, quan Simpson tenia quinze anys, va començar a donar classes de matemàtiques en escoles a les tardes. Al voltant del 1730, Simpson va iniciar la seva relació amb la revista *Ladies's Diary*, una revista de divulgació de matemàtiques, a partir de la qual sembla que va entrar en contacte amb el mètode de les fluxions. L'any 1737, Simpson, que ja havia esdevingut popular per les seves classes particulars, després d'uns quants anys de treball, va publicar el seu primer llibre, a partir de subscripcions de lectors, *A New Treatise of Fluxions*. A partir d'aquest moment són diverses les obres publicades¹¹ per Simpson. L'any 1743 va entrar com a segon titular a la Royal Military Academy de Woolwich i l'any 1745 es va produir un dels moments de màxim reconeixement públic de Simpson en ser admès com a membre de la Royal Society, excusat, però, d'haver de pagar per aquesta admissió i exempt de futurs pagaments, degut a la seva condició modesta. L'any 1750 Simpson va publicar un dels llibres que el van fer més popular: *Doctrine and Application of Fluxions*. Es tractava d'una segona versió del que havia escrit

9. Juan Navarro Loidi ha estudiat l'aportació de l'Academia de Artillería a les matemàtiques en el seu llibre *Don Pedro Giannini o las Matemáticas de los artilleros del siglo XVIII* (2013) i, en particular, el paper de Cerdà en relació amb aquesta acadèmia en l'article «Lección de Artillería by Tomás Cerdà and the Revolution of the spanish Artillery during the 18th Century» (2008).

10. Diversos autors han analitzat la vida i l'obra de Simpson. És de destacar el llibre *Thomas Simpson and his times* (1929), de Frances Marguerite Clarke, que permet situar l'obra de Simpson en el seu context local i històric. Així com cal citar els diversos articles de Mònica Blanco sobre Simpson entre els quals mereix particular atenció «Thomas Simpson: Weaving fluxions in 18th-century London» (2013), publicat a *Historia Mathematica*.

11. *The Doctrine of Annuities and Reversions deduced from General and Evident Principles* (1942); *Mathematical Dissertations on a Variety of Physical and Analytical Subjects* (1943); *A Treatise of Algebra* (1745); *The Elements of Plane Geometry* (1747); *Trigonometry, Plane and Spherical with the Construction and Application of Logarithms* (1748); *Select Exercises for Young Proficients in the Mathematicks* (1752); *Miscellaneous Tracts on Some Curious and Very Interesting Subjects in Mechanics, Physical Astronomy and Speculative Mathematics* (1757).

tretze anys abans i on se sistematitzava i es presentava de forma didàctica el mètode de fluxions newtoniana. La influència del llibre de Simpson va traspasar les fronteres de la Gran Bretanya, com es pot comprovar en el cas de Cerdà, que el va prendre com a model per escriure el seu *Tratado de Fluxiones*.

3. El *Tratado de Fluxiones*: un tractat de càlcul diferencial al segle XVIII

En aquest capítol situarem el *Tratado de Fluxiones* com un tractat d'orientació newtoniana i concretament com una adaptació de *Doctrine and Application of Fluxions* de Thomas Simpson, un dels matemàtics britànics newtonians més rellevants. Exposarem l'estructura general del tractat tot i comparant-lo amb el llibre de Simpson. Particularment, posarem en relleu la importància de la segona versió dels primers catorze capítols del tractat de Cerdà, a partir dels quals es pot comprovar que els públics a qui anaven dirigits eren fonamentalment els alumnes del matemàtic català.

A mitjans del segle XVIII, el nou càlcul s'estava desenvolupant segons dues concepcions diferents: la leibniziana i la newtoniana.¹² Newton havia introduït el concepte de fluxió com una eina que intentava generalitzar resultats parcials obtinguts amb anterioritat sobre les corbes. Per a Newton totes les quantitats variables eren concebudes com a generades per un moviment on el temps tenia el paper de variable contínua. Va anomenar quantitats fluents aquelles quantitats que podien ser augmentades —o disminuïdes— gradualment i indefinidament i les fluxions eren les velocitats amb què les fluents eren augmentades o disminuïdes pel moviment que les produïa.¹³ Per altra banda, el fonament teòric del càlcul diferencial al continent europeu es recolzava en el concepte de «diferència» o diferencial. Per a Leibniz, les quantitats variables eren concebudes com una successió de valors infinitament propers i la diferencial d'una variable y era justament la diferència infinitament petita entre dos valors successius de y .¹⁴ El «temps» i, en general, els conceptes cinemàtics, tals com «fluent» i «velocitat», que en el càlcul fluxional tenien un paper central, no tenien cap rellevància en el càlcul diferencial leibnizià. També les quantitats geomètriques eren vistes de diferent manera per a cada concepció. Per a Leibniz una corba era concebuda com un polígon amb un nombre infinit de costats infinitèsims, mentre que per a Newton les corbes eren concebudes com a generades pel

12. Un dels primers textos que Newton elabora, el 1671, sobre el mètode de les fluxions porta per títol *Tractatus de Methodis Serierum et Fluxionum* i el primer article que Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) publica, el 1684 a la revista *Acta Eruditorum* de Leipzig, i que actualment hom considera com l'origen del càlcul diferencial, està titulat «Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare proi illis calculi genus».

13. Newton (1671: 20). Un dels autors que ha aprofundit sobre l'aportació de Newton al càlcul diferencial és Guicciardini (1999).

14. Són molts els estudis sobre l'obra de Leibniz, entre els quals podem citar els de Bos (1980) i Knobloch (1990, 2002, 2004).

moviment continu d'un punt o de la combinació del moviment de diversos elements geomètrics.

Comparant el *Tratado de Fluxiones* amb el text de Simpson

El *Tratado de Fluxiones* de Cerdà va ser un dels primers textos que va introduir el càlcul diferencial a l'ensenyament a Espanya, des d'una perspectiva newtoniana.¹⁵ Tot i així, durant molts anys no s'ha tingut en compte la importància d'aquest tractat, entre altres motius perquè, conservant-se en forma de manuscrit, no s'havia arribat a publicar mai.

Una de les primeres referències que tenim de l'elaboració d'aquest tractat es pot trobar en un esborrany d'una carta a Simpson, el 1758, on Cerdà reconeixia al matemàtic anglès com el seu guia, referint-se al llibre *The Doctrine and Application of Fluxions* que Simpson havia publicat el 1750, a més de demanar-li consell sobre aquells autors més adequats per escriure altres tractats que volia desenvolupar en el futur:¹⁶

[...] ahora dispongo el *Tratado de Fluxiones*; en esto te sigo a ti como guía y maestro y como sinceramente reconozco [...] siendo tu, por tus libros, el mejor para seleccionar estos autores que me servirían de guía para preparar estos elementos de Mecánica, Estática, Hidrostática, Óptica, Astronomía, Navegación, Arquitectura, [...]. (Cerdà, *Carta a Simpson*, Barcelona, 1758. RAH, Cortes 9/2792)

Ha calgut una autèntica reconstrucció d'aquest tractat ja que els manuscrits de Cerdà relatius a fluxions estan distribuïts entre dos lligalls a la biblioteca de la Real Academia de la Historia, barrejats amb altres obres del mateix autor i d'altres autors. La majoria dels capítols, tot i estar titulats, no estan numerats i ha estat necessària una tasca de reordenació del *Tratado de Fluxiones* que ha consistit bàsicament a identificar cada capítol dels quals consta, seguint una sèrie de criteris, com són els mateixos comentaris que Cerdà fa en el seu text,

15. El tractat de Cerdà sobre càlcul diferencial no va ser l'únic en la seva època. A Espanya, de l'època de Cerdà, es pot trobar un text publicat de càlcul diferencial i integral per a l'ensenyament, formant part d'un tractat més ampli, el «Tratado V» dins el *Curso Militar de Mathematicas* (1753-1756) de Pedro Padilla (1724-180?), però també altres treballs i projectes, que s'han conservat en forma manuscrita, i que tracten sobre càlcul diferencial, com els de Johannes Wendlingen (1715-1790), Christian Rieger (1714-1780) i Esteban Bramieri (1720-1794). L'estudi comparatiu del text de Cerdà amb aquests altres tractats contemporanis sobre càlcul diferencial evidencia que en alguns col·legis jesuïtes i algunes acadèmies militars, a mitjans del segle XVIII, ja s'estava introduint aquest càlcul. Els textos d'autors europeus com Christian Wolff (1679-1754), Maclaurin o Simpson són els que van arribar a la Península i és a partir d'ensenyants com Padilla, Wendlingen, Rieger, Bramieri o Cerdà que aquest càlcul diferencial i integral es va difondre i es va configurar com un nou camp matemàtic.

16. Entre els estudis que, amb anterioritat, han analitzat l'obra de Cerdà, és de destacar el treball de recerca del Centre d'Estudis d'Història de les Ciències de la Universitat Autònoma de Barcelona, *Tomas Cerdà i el seu «Tratado de Astronomia»* (1996), de Lluís Gassiot Matas.

l'ordre dels capítols del llibre de Simpson, la disposició física actual dels manuscrits en els lligalls i la catalogació d'historiadors precedents, particularment d'Eulogio Hernández Alonso i Norberto Cuesta Dutari.

Han estat identificats 238 folis manuscrits sobre fluxions, dels quals 193 corresponen a una primera versió i 45 a una segona dels primers catorze capítols del tractat que Cerdà ja havia escrit prèviament. La primera versió, que seria la més completa, estaria composta de dues parts. La primera part constaria de setze capítols amb un apèndix al final sota el títol de «Adiciones al Tratado de Fluxiones» i la segona part tindria vuit capítols més. De manera que el tractat tindria vint-i-quatre capítols en total.

En la primera part del tractat en la seva primera versió hi ha quatre capítols introductoris on es donen les definicions i les regles del càlcul fluxional —el que correspondria a les regles bàsiques del càlcul diferencial. Tot seguit apareixen quatre capítols dedicats a l'aplicació del càlcul fluxional a la geometria, amb problemes de màxims i mínims, problemes de tangència i problemes sobre curvatura i punt d'inflexió, on s'apliquen fluxions de segon ordre. A continuació, hi ha tres capítols dedicats al mètode invers de les fluxions —càlcul integral— on s'expliquen les tècniques bàsiques —tècniques d'integració— d'aquest mètode invers. Després hi ha quatre capítols d'exercicis d'aplicació del càlcul integral, com són els problemes de quadratura de corbes, de rectificació de corbes i de càlcul de volums i de superfícies de sòlids. La primera part del tractat acaba amb un capítol dedicat a les variables exponencials i logarítmiques i un altre (el capítol 16) amb una ampliació de tècniques d'integració. Abans de començar la segona part del tractat, Cerdà inclou l'apèndix «Adiciones al Tratado de Fluxiones», on recull diversos exercicis que ja eren en el text de Simpson però que no havien estat inclosos en els capítols precedents del text de Cerdà. La segona part del text consta d'un capítol dedicat a les equacions fluxionals —equacions diferencials—, d'una part dedicada a diverses tècniques d'integració (quatre capítols) i de dos capítols d'aplicació del càlcul fluxional, no solament a la geometria sinó també a la mecànica, l'òptica, l'astronomia i la trigonometria esfèrica.

La segona versió correspon exclusivament a la dels primers catorze capítols i el seu ordre és fàcilment identificable ja que en aquest cas els capítols van ser numerats, excepte el darrer, pel mateix Cerdà.

Agrupant, per temes, els capítols del text de Simpson i el de Cerdà en una taula —on també s'inclouen les dues versions d'aquest autor—, es pot veure quines són les semblances i les diferències entre ells:¹⁷

17. Hem respectat el contingut exacte dels títols, adaptant, però, l'ortografia a l'actual. Els números i/o expressions entre claudàtors no són originals, sinó que han estat introduïts segons l'ordre que s'ha establert a partir de la nostra recerca. En aquesta taula hem modificat, en alguns casos, l'ordre de Cerdà per poder agrupar els capítols per temes. La primera part del text de Cerdà acabaria amb el capítol 16 per incloure, a continuació, l'apèndix «Adiciones al Tratado de Fluxiones».

TAULA 1: Comparant el *Tratado de Fluxiones* amb *The Doctrine and Application of fluxions*

El llibre de Simpson	Primera versió de Cerdà	Segona versió de Cerdà
Els primers capítols de definicions i regles		
Secció I (I Part): Of the Nature, and Investigation, of Fluxions	[Cap. 1] Del Cálculo Diferencial e Integral Cap. [2,3] De las Fluxiones de Cantidades Algebraicas Cap. [4] De las Fluxiones Superiores	Cap. 1 Explicase la Naturaleza de las Fluxiones Cap. 2 Algunos Problemas para encontrar las Fluxiones de las Cantidades Algebraicas Cap. 3 Reglas únicas para encontrar las Fluxiones de las Cantidades Algebraicas sacadas de los Problemas precedentes Cap. 4 De las Fluxiones superiores
Aplicacions geomètriques del mètode directe de fluxions		
Section II (Part I): Of the Application of Fluxions to the Solution of problems de Maximis et Minimis Section III (Part I): The Use of Fluxions in drawing Tangents to Curves Section IV (Part I): Of the Use of Fluxions in determining the Points of Retrogression, or contrary Flexure in Curves Section V (Part I): The Use of Fluxions in determining the Radii of Curvature, and the Evolutes of Curves	Cap. [5] Aplicación de las Fluxiones para la resolución de los Problemas de Máximo o Mínimo Capítulo. [6] De la Aplicación de las Fluxiones para tirar tangentes a las curvas Capítulo. [7] Aplicación de las fluxiones de segundo orden para encontrar el punto de Inflexión o vuelta de las curvas Cap. [8] Aplicación de las primeras y segundas fluxiones para determinar el radio de curvatura y las Evolutas de las curvas	Cap. 5 Resuélvase por las Fluxiones algunos Problemas de Máximo y Mínimo Cap. 6 Explicase el Método de tirar las tangentes a las Curvas por medio de las Fluxiones Cap. 7 Cómo se encuentran los Puntos de Inflexión de las Curvas por la Fluxiones de Segundo Orden Capítulo. 8 Determinínense por el Método Directo de las Fluxiones los Radios de Curvatura y las Evolutas de las Curvas
El mètode invers de les fluxions		
Section VI (Part I): Of the Inverse Method, or the Manner of determining the Fluents of given Fluxions	[Cap. 9.1] Parte 2. Del Método Inverso de las Fluxiones Capítulo 2.[9.2] Otro método reduciendo la fluxión a serie indeterminada Cap. [9.3] Del uso de las Series Infinitas para encontrar las Fluents Cap. [10] De la Cantidad que se ha de añadir a la fuente encontrada	Cap. 9 Explicase el Método Inverso de las Fluxiones y algunas de sus Reglas Cap. 10 Cómo se habrá de corregir la Fuente encontrada por el Método Inverso de las Fluxiones

(Continua)

TAULA 1: Comparant el *Tratado de Fluxiones* amb *The Doctrine and Application of fluxions* (cont.)

El llibre de Simpson	Primera versió de Cerdà	Segona versió de Cerdà
Aplicacions geomètriques del mètode invers de fluxions		
Section VII (Part I): Of the Use of Fluxions in finding the Areas of Curves Section VIII (Part I): The Use of Fluxions in the Rectification, or finding the Lengths, of Curves Section IX (Part I): The Application of Fluxions in investigating the Contents of Solids Section X (Part I): The Use of Fluxions in finding the Superficies of Solid Bodies	Cap. [11] Aplicación del Método inverso de las Fluxiones para la Cuadratura de las curvas Cap. [12] Del uso de las Fluxiones para la Rectificación de las curvas Cap. [13] Del uso de las Fluxiones para encontrar lo sólido de los cuerpos Cap. [14a] Del uso de las fluxiones para encontrar las superficies de los sólidos	Cap. 11 Aplicación del Método Inverso de las Fluxiones para la Cuadratura de las Curvas Cap. 12 Aplicación del Método Inverso de las Fluxiones para la Rectificación de Curvas Cap. 13 Aplicación del Método Inverso de las Fluxiones para encontrar lo sólido de los Cuerpos Cap. [14b] Aplicación del Método inverso de las Fluxiones para encontrar la Superficie de los Cuerpos
El llibre de Simpson	Primera versió de Cerdà	
Fluxions de variables no algebraiques		
Section I (Part II): The Manner of investigating the Fluxions of Exponentials, with Those of the Sides and Angles of Spherical Triangles	Cap. [15] De las Fluxiones de Cantidades Exponenciales Cap. [24] De las Fluxiones de los Lados y Ángulos de los Triángulos Esféricos	
Adiciones al Tratado de Fluxiones		
Correspon a parts de diverses seccions II, III, V, VI, VIII i IX (I Part) i la secció IV (II Part)	Adiciones al Tratado de Fluxiones	
Equacions fluxionals		
Section II (Part II): Of the resolution of fluxional Equations, or the Manner of finding the Relation of the flowing Quantities from that of the Fluxions	Capítulo [17] De la Resolución de las Ecuaciones Fluxionales, o modo de encontrar la relación de las Cantidades Fuentes por la de las Fluxiones	
Diverses tècniques per calcular fluents		
Section IV (Part II): Of the Transformation of Fluxions Section III (Part II): Of the Comparison of Fluents, or the Manner of finding one Fluent from another Section V (Part II): The Investigation of Fluents of rational Fractions, of several Dimensions, according to the Forms in Cotes's Harmonia Mensurarum Section VI (Part II): The Manner of investigating Fluents, when Quantities, and their Logarithms Arcs and their Sines, &c. are involved together: With other Cases of the like Nature	Cap. [16] De la Transformación de las Fluxiones [Cap. 18] De la Comparación de las Fuentes o Método para encontrar una Fuente dada otra Cap. [19] De las Fuentes de Fracciones Racionales de diferentes dimensiones, según las Fórmulas de la Harmonia Mensurarum de Cotes Cap. [20] Métodos para investigar las Fuentes, cuando las Cantidades y sus Logaritmos, los Arcos y sus Senos & se encuentran entre sí multiplicados o ocurren casos de la misma especie	

(Continua)

TAULA 1: Comparant el *Tratado de Fluxiones* amb *The Doctrine and Application of fluxions* (cont.)

El llibre de Simpson	Primera versió de Cerdà
Section VII (Part II): Showing how Fluents, found by Means of Infinite Series, are made to converge	Cap. [21] De qué suerte las Fuentes encontradas por series infinitas se puedan hacer convergentes
Les aplicacions del càlcul fluxional a diversos camps	
Section X (Part II): Of the Application of Fluxions to the Resolution of such Kinds of Problems De Maximis et Minimis, as depend upon a particular Curve, whose Nature is to be determined	Cap. [22] De la Aplicación de las Fluxiones a la Resolución de aquellas especies de Problemas de Maximis y Minimis, que dependen de una Particular Curva, cuya naturaleza se debe determinar
Section XI (Part II): The Resolution of Problems of various Kinds	Cap. [23] Resolución de varios Problemas de diferentes Especies
Sobre mecànica	
Section XI (Part I): Of the Use of Fluxions in finding the Centers of Gravity, Percussion, and Oscillation of Bodies Section XII (Part I): Of the Use of Fluxions in determining the Motion of Bodies affected by centripetal Forces Section VIII (Part II): The Use of Fluxions in determining the Motion of Bodies in resisting Mediums Section IX (Part II): The Use of Fluxions in determining the Attraction of Bodies under different Forms	

Després d'observar la darrera taula comparativa, la primera conclusió, tot i que resulta evident que un text pren com a referència l'altre, és que no s'està davant d'una simple traducció. Entre altres coses, es pot veure que el text de Simpson té diverses seccions que no tenen els seus corresponents capítols en el text de Cerdà, com les seccions dedicades a la mecànica. També es pot observar que Cerdà no respecta exactament l'estructura del llibre de Simpson, desglossant, en alguna ocasió, en diversos capítols una sola secció del llibre de Simpson o agrupant en un sol capítol algunes parts de diverses seccions del llibre de Simpson, com per exemple l'apèndix «Adiciones al Tratado de Fluxiones». Per altra banda, Cerdà redueix el text original de Simpson, particularment en els primers catorze capítols, ja que selecciona només determinats exercicis, encara que amplia algunes explicacions quan es tracta de presentar els conceptes més generals en els quatre primers capítols.

Els catorze primers capítols del *Tratado de Fluxiones*

Ha resultat particularment interessant comparar les dues versions dels catorze primers capítols. I s'ha fet evident que la primera versió és un esborrany amb correccions i anota-

cions al marge, amb les figures no gaire ben elaborades, mentre que la segona versió, a més de tenir els capítols numerats, està preparada per ser impresa. Hi ha hagut entre una versió i l'altra una reducció de folis, ja que Cerdà no ha mantingut tots els exercicis. Però les diferències entre les dues versions també es troben en el mateix contingut. El llenguatge utilitzat per Cerdà en la primera versió és més proper al del càlcul diferencial continental, a diferència de l'utilitzat en la segona versió que és més proper a la terminologia newtoniana.

A tall d'exemple reproduïm un dels primers paràgrafs del capítol dedicat al mètode invers de les fluxions en les dues versions de Cerdà:

Cerdà: primera versió	Cerdà: segona versió
<p>Dadas las cantidades fluentes encontrar sus fluxiones, diferencias o elementos, lo enseña el Método directo de las fluxiones o el cálculo diferencial. Al contrario volviendo los pasos, dadas las fluxiones encontrar sus respectivas fluentes lo debe enseñar el [Cálculo integral, el cálculo sumatorio, y en una palabra, inverso] Método inverso de las fluxiones.*</p> <p>(Cerdà, <i>Tratado de Fluxiones</i>, «[Cap. 9.1]»: RAH, 9/2812 f. 121r.)</p>	<p>Dadas las Cantidades Fluentes, encontrar sus Fluxiones lo enseña el <i>Método Directo de las Fluxiones</i> que hasta aquí hemos tratado. Al contrario volviendo los pasos, dadas las Fluxiones encontrar sus respectivas Fluentes lo debe enseñar el <i>Método Inverso</i> de las Fluxiones mismas.</p> <p>(Cerdà, <i>Tratado de Fluxiones</i>, «Capítulo 9»: RAH, 9/2792-29 f. 6r.)</p>

* Les paraules entre claudàtors estan barrades.

Està clar que el llenguatge utilitzat per Cerdà, en la seva primera versió, mostra una formació prèvia més propera al càlcul diferencial continental, mentre que en la segona versió ha desaparegut tota referència a «cálculo diferencial» o «cálculo integral». De fet, en la llista de llibres¹⁸ —molts d'ells, probablement, estudiats a Marsella— que s'ha trobat entre els manuscrits de Cerdà, n'hi ha alguns dels autors més coneguts del càlcul diferencial continental, com Johann Bernoulli (1667-1748) o el Marquès de L'Hôpital (1661-1704).¹⁹ Sembla com si Cerdà, un cop va optar per Simpson, no acabés d'abandonar la visió i la terminologia leibnizianes, i només quan va escriure un text per als seus alumnes, preparat per a la impremta, en va prescindir.

També resulta interessant comparar els primers catorze capítols —en les seves dues versions— amb la resta del tractat. Apuntem alguns elements rellevants d'aquests capítols:

- En els folis que fan de portada als quaderns on Cerdà va agrupar el seu text corresponent als primers capítols de la segona versió, es pot llegir l'anotació de «Quadernos de fluxiones para la clase».

18. Llistes de llibres científics preparades per Cerdà i esborranys de comandes d'alguns d'ells. Real Academia de la Historia (RAH), Cortes 9/2792.

19. *L'Analyse des infiniments petits* [...] de l'Hôpital va ser l'obra de referència del càlcul diferencial leibnizianà durant gran part del segle XVIII.

- Els primers catorze capítols són els únics capítols repetits.
- És només en aquests capítols que Cerdà incorpora figures, mentre que en els altres capítols posteriors Cerdà, en lloc d'incloure-hi figures, només anota la pàgina del llibre de Simpson on es pot trobar la figura.
- És en aquests primers capítols on Cerdà afegeix més text originalment seu, especialment a l'hora d'introduir nous conceptes.

Tenint en compte els nombrosos indicis que Cerdà volia efectivament publicar el seu *Tratado de Fluxiones*, la primera conclusió que es pot treure en llegir la segona versió dels catorze primers capítols és que es tractava de la versió a punt per a ser impresa. I la segona conclusió fa referència als principals receptors d'aquests primers capítols, és a dir, els seus alumnes. La mateixa duplicitat de versions per a aquests primers capítols, on apareixen les anotacions de «Quadernos de fluxiones para la clase», són algunes de les raons que justifiquen la conclusió que es tracta d'un manual per a la classe. Efectivament, creiem que s'està davant d'uns apunts que Cerdà va utilitzar per a les classes, en va escriure un primer esborrany al qual hi va afegir correccions i anotacions, els va reescriure per millorar-ne l'explicació, va incorporar les figures al text, millorant-les notablement en la segona versió, i tot plegat amb la intenció d'imprimir-los. En definitiva, no resulta arriscat concloure que els primers catorze capítols van constituir el programa d'un curs que possiblement Cerdà va impartir al Col·legi de Cordelles de Barcelona, i probablement, més tard, al *Colegio Imperial* de Madrid.²⁰

4. L'aportació matemàtica d'El *Tratado de Fluxiones*

En aquest capítol volem explicar quines són les principals aportacions de Cerdà dins el marc teòric matemàtic on cal inscriure el treball d'aquest autor. En primer lloc cal assenyalar que el text de Cerdà gira entorn d'un concepte de fluxió que, si bé és d'origen newtonià, pren el seu ple significat a partir de la definició introduïda per Simpson, on s'evita el moment com a quantitat infinitesimal. Dins d'aquest apartat explicarem com Cerdà presenta la fluxió del producte de dues variables i el càlcul de la subtangent a una corba com a exemples de l'aplicació de la definició de fluxió. En segon lloc volem mostrar com Cerdà incorpora en el seu discurs, eminentment newtonià, determinats elements leibnizians, allunyant-se, d'aquesta manera, de Simpson. En aquest apartat veurem com el mateix Cerdà compara la diferencial leibniziana amb la fluxió, com adopta la notació de diferencial per representar la fluxió i com, sovint, incorpora conceptes netament leibnizians en el seu text. En tercer lloc volem posar en relleu el pes que té l'àlgebra en el tractat de Cerdà i finalment, en quart lloc, assenyalarem com la dimensió didàctica de l'autor orienta tota la seva obra.

20. La Reial Acadèmia de Ciències i Arts de Barcelona va publicar, el desembre de 2015, *Cerdà (1757-1759). Tratado de Fluxiones*, que reuneix la transcripció de la primera part del tractat de Cerdà, a cura de Joaquim Berenguer.

La fluxió com a nucli vertebrador del càlcul

És entorn del concepte de fluxió que es va estructurar la concepció geomètrico-cinemàtica impulsada per Newton, a finals del segle XVII. Nogensmenys aquest concepte no va quedar del tot definit en un primer moment i en la mateixa obra de Newton es pot observar una substancial evolució d'aquest o, si més no, múltiples matisos sobre aquest nou concepte. Per a Newton la idea de fluxió anava associada a la de la velocitat de creixement, o de decreixement, de la variable o fluent, i, en els seus primers càlculs, a la de «moment», com a increment infinitament petit:

13. Els moments de les Quantitats fluents (és a dir, les seves indefinidament petites Parts, a partir de les quals, en indefinidament petits intervals de Temps, són contínuament augmentades) són com les Velocitats de seu Fluir o Augment.

14. Si el Moment de qualsevol quantitat, com x , està representat pel Producte de la seva Velocitat \dot{x} per una indefinidament petita Quantitat o (és a dir, per $\dot{x}o$) els Moments de les altres v, y, z , estaran representats per $\dot{v}o, \dot{y}o, \dot{z}o$; ja que $\dot{v}o, \dot{x}o, \dot{y}o$ i $\dot{z}o$, estan una a altra com $\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}$ i \dot{z} .²¹ (Newton, 1671: 24)

La introducció dels moments va permetre a Newton la justificació analítica del seu mètode de fluxions, com es posa de manifest en la seva primera demostració de l'algorisme fluxional en el seu *Tractatus de Methodis Serierum et Fluxionum* (1671).²² En aquesta demostració s'estableix la relació entre les fluxions de les variables de l'expressió $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$. El procediment seguit consisteix a substituir x i y per $x + \dot{x}o$ i $y + \dot{y}o$, i, descartant tots els termes multiplicats per o , per ser infinitament petits en relació amb els altres, s'arriba a l'expressió final $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0$.²³

L'evolució posterior dels fonaments teòrics del mètode de fluxions va estar estretament relacionada amb l'intent d'evitar els infinítesims,²⁴ orientació que ja havia iniciat el mateix Newton, desenvolupant una forma sintètica (geomètrica) del mètode de les fluxions, on no

21. «13. The moments of flowing Quantities (that is, their indefinitely small Parts, by the accession of which, in indefinitely small portions of Time, they are continually increased) are as the Velocities of their Flowing or Increasing.

14. Wherefore if the Moment of any one, as x , be represented by the Product of its Celerity \dot{x} into an indefinitely small Quantity o (that is, by $\dot{x}o$), the Moments of the others v, y, z , will be represented by $\dot{v}o, \dot{y}o, \dot{z}o$; because $\dot{v}o, \dot{x}o, \dot{y}o$ and $\dot{z}o$, are to each other as $\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}$ and \dot{z} .»

22. El *Tractatus de Methodis Serierum et Fluxionum* (1671), que no es va publicar fins al 1736, sistematitzava un altre tractat que Newton havia escrit el 1666, anomenat *October 1666 Tract of Fluxions*.

23. Newton (1671: 24).

24. Hi ha diversos autors que han analitzat el paper dels indivisibles i els infinítesims en els inicis del càlcul diferencial, com Vincent Jullien en el seu article «Explaining the Sudden Rise of Methods of Indivisibles»; Antoni Malet i Marco Panza en «Newton on Indivisibles», i M. Rosa Massa en «The Role of Indivisibles in Mengoli's Quadratures», tots ells dins Jullien, Vincent *et al.*, *Seventeenth-Century Indivisibles Revisited* (2015).

apareguessin les quantitats infinitesimals i basant-se en una idea molt propera a la de límit.²⁵ Posteriorment, tant *The Elements of the Method of Fluxions, demonstrated after the Manner of Ancient Geometricians* (1742) de Colin Maclaurin (1698-1746)²⁶ com *The Doctrine and Application of Fluxions* (1750) de Simpson van establir les bases geomètrico-cinemàtiques del mètode de les fluxions i van donar una definició de fluxió on no hi cabien els infinitèsims. De manera que va aparèixer un nou element diferenciador, l'ús dels infinitèsims, entre els fluxionistes i els leibnizians i alguns autors del moment, en ocasions, van dibuixar una frontera entre els dos corrents, en aquest sentit.

Cerdà, com Simpson, va adoptar una definició de fluxió que evitava el concepte de moment. La fluxió, ara, no seria tant la velocitat sinó un increment finit, proporcional a aquesta velocitat, exactament, l'increment de la variable si la velocitat es mantingués constant:

Para comprender perfectamente el Método de las Fluxiones, téngase presente que toda Magnitud Geométrica se reduce a Línea, Superficie o Plano y Sólido. La Línea se concibe formada por el Movimiento continuo de un Punto que la describe, la Superficie por el movimiento continuo de una Línea y el Sólido o Cuerpo por el movimiento continuo de una Superficie o Plano; y aquella parte de Línea, Superficie o Sólido que describiría el Punto, Línea o Figura generatriz en un tiempo dado, si perseverase constante e invariable en la velocidad, que en algún punto o posición determinada tiene, es la que llamamos Fluxión en aquel punto de la tal cantidad que así se forma, llamada por esto Fluente. (Cerdà, *Tratado de Fluxiones*, «Capítulo 1»: RAH, 9/2812 f. 85r.)

De manera que Cerdà va seguir els continuadors del càlcul fluxional, com Simpson i Maclaurin, que havien adoptat el concepte de fluxió com a increment finit «condicional» de la variable, entre altres raons per tal de procurar evitar els infinitèsims. En qualsevol cas, Cerdà va recollir el nucli vertebrador de la visió newtoniana: la idea que qualsevol quantitat matemàtica es pot veure com a generada per un moviment, on el temps és el paràmetre sempre present.

A partir d'aquesta definició, Cerdà comença a deduir les primeres regles per obtenir les fluxions de diverses funcions o quantitats, sempre vistes com a objectes geomètrics.

Un dels primers resultats és el de la fluxió d'una superfície curvilínia Amn (fig. 1). Cerdà dedueix que la fluxió d'una àrea curvilínia és un rectangle. Efectivament, encara que es tracti d'una àrea generada per una línia mn variable en longitud, la fluxió de l'àrea Amn serà

25. El 1680 Newton va escriure *Geometria curvilinearis*, on va desenvolupar l'anomenada forma sintètica del mètode de fluxions, i és aquest mètode sintètic de les fluxions —de les primeres i darreres raons— el que és explicat en els *Principia* (1687). Més tard, el 1704, Newton va publicar *Tractatus de Quadratura Curvarum*, com a apèndix de l'obra *Opticks*, on va tornar a defensar el mètode sintètic dels antics.

26. Per analitzar l'obra de Maclaurin vegeu Bruneau (2011).

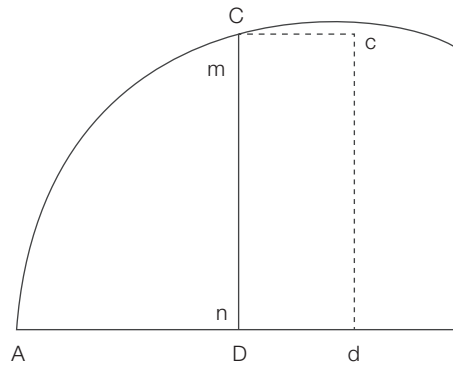
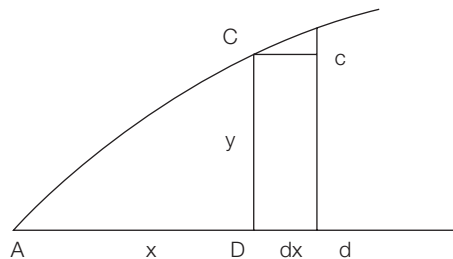


Fig. 1: La fluxió d'una superfície curvilínia.

el rectangle $ndcm$, ja que la fluxió és un increment «teòric» on se suposa la velocitat de creixement invariable i , per tant, també invariable la longitud de mn , tal com es pot llegir en el text: «Porque la Fluxión de la Área Amn es el espacio que se describiría si la línea nm perseverase invariable ya en longitud ya en el movimiento que tiene en la posición DC » (Cerdà, *Tratado de Fluxiones*, «Cap. 1»: RAH 9/2812 f. 86r).

Aquest resultat permetrà escriure que la fluxió de l'àrea ACD (fig. 2) és igual a ydx , on y és l'ordenada de la funció que descriu la corba i dx la fluxió de la variable x :

Fig. 2: La fluxió de l'àrea $ACD = ydx$.

La fluxió del producte

A partir d'aquí Cerdà dedueix la fluxió del producte de dues quantitats. Per a la demostració de la regla del producte es considera el producte de dues variables com un rectangle.

Es tracta de calcular la fluxió de $AC \times AB$, o, el que és el mateix, $x \times y$, que s'identifica amb l'àrea del rectangle $ABDC$ (fig. 3). Aquest rectangle és la fluent generada pel moviment simultani de les rectes CR i BF . A mesura que aquestes rectes es van desplaçant paral·leles a elles mateixes, respectivament, van determinant el rectangle considerat, a la vegada que el punt D descriu la corba ADG . Per calcular la fluxió de la superfície d'aquest rectangle, Cerdà divideix aquesta superfície en dues àrees curvilínies: ADC i ADB . La fluxió de l'àrea ADC

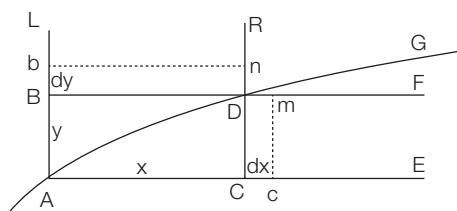


Fig. 3: La fluxió del producte de dues variables.

seria l'àrea del rectangle $CDmc$ —a partir del resultat obtingut prèviament— i la fluxió de l'àrea ADB , l'àrea del rectangle $BDnb$. Per tant, la fluxió de tota l'àrea serà la suma de les àrees dels dos rectangles $CDmc$ i $BDnb$. Es podrà, doncs, escriure que la fluxió de $AB \times AC$ és igual a $ydx + xdy$, o, el que és el mateix, $d(xy) = ydx + xdy$.

La tangent a una corba

Una altra de les demostracions que apareix en el tractat de Cerdà, on s'aplica el seu concepte de fluxió, és la que determina la tangent a una corba.

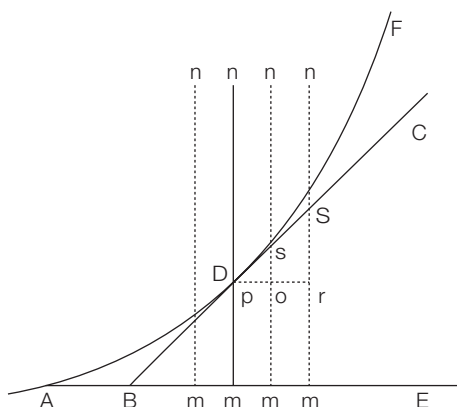


Fig. 4: La tangent a una corba.

En aquest cas el que es vol és dibuixar la tangent a la corba ADF en el punt D (fig. 4). La línia mn es mou paral·lelament a ella mateixa al mateix temps que el punt p es mou sobre la recta mn . La combinació dels dos moviments genera la corba ADF . La fluxió de l'abscissa Am (x), en el punt D , és Dr (dx) i la de l'ordenada Dm (y) és rS (dy). Si les velocitats dels dos moviments es mantinguessin constants i iguals a les que tenen en el punt D , el punt p es desplaçaria sobre la recta SB , ja que la raó dels increments de les dues variables s'hauria de mantenir constant. Per construcció de la recta SB , els triangles SrD i DmB són semblants. Per tant, tindrem:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{Bm}{y}, \text{ d'on } BM = \frac{xdy}{dy}.$$

Un cop calculat Bm , del que es tracta ara és de demostrar que justament la recta BDC és la tangent a la corba ADF en el punt D . Efectivament, segons Cerdà, perquè el punt p descriu una corba, a partir de D , i no una recta, cal que el seu moviment sobre la recta mn no sigui uniforme sinó accelerat o retardat. Si aquest moviment és accelerat l'espai realment recorregut en un determinat interval de temps serà més gran que el que descriuria amb un moviment uniforme, com apareix en la figura 4. Per tant, la corba descrita pel punt p , en un moviment accelerat, estarà «per sobre» (corba convexa) de la recta BDC , que correspon al moviment uniforme. Amb el moviment retardat la corba descrita pel punt p estaria «per sota» (corba còncava) de la recta BDC . Però, en qualsevol cas, la corba ADF sempre estarà «a un sol costat» de la recta BDC i, per tant, aquesta serà la seva tangent. Així doncs, Bm serà la subtangent i BDC la tangent. Cal observar que la demostració de Cerdà, que és la mateixa que desenvolupa Simpson, per deduir la fórmula que dona la subtangent Bm , a partir de les fluxions de les variables, inverteix l'ordre en què sovint aquesta apareix, en la seva època. És a dir, en primer lloc construeix una recta que tingui per pendent la raó de les fluxions de les dues variables i, després, demostra que aquesta recta és efectivament la tangent buscada.

Tant en la demostració de la fluxió del producte de dues variables com en l'obtenció de la subtangent d'una corba, Cerdà ha aplicat la definició de la fluxió d'una quantitat com un teòric increment finit de la fluent condicionat al fet que la velocitat de creixement o decreixement d'aquesta fluent fos constant, i d'aquesta manera no ha necessitat recórrer als infinítesims.

La incorporació d'elements leibnizians

A partir de la definició de diferencial com la diferència infinitament petita entre dos valors successius de la variable, una de les característiques més rellevants del corrent leibnizià va ser el desenvolupament de tota una teoria sobre els infinítesims. Wolff va ser un dels primers a tractar aquesta teoria en els seus *Elementa Matheseos Universae* (1713-1715) i molts dels tractats de càlcul diferencial del continent van començar amb l'anàlisi dels infinits, on també s'analitzava el que s'entenia per quantitat infinitesimal, més endavant denominada quantitat diferencial. A Espanya, aquest és el cas del tractat de Padilla que es va inspirar en els *Eléments de la Géometrie de l'infini* de Bernard le Bovier Fontenelle (1657-1757) per escriure el primer capítol, «De las cantidades infinitas», del Tom V del seu *Curso militar de Mathematicas*, o el text, conservat en forma de manuscrit, de Wendlingen que va seguir fidelment el text de Wolff. No és el cas, en canvi, de Cerdà que, en principi, descarta els infinítesims, seguint a Simpson, on aquests han desaparegut dels seus textos.

Comparant la fluxió i la diferencial

En relació amb la comparació entre fluxió newtoniana i diferencial leibniziana, el paper que hi va tenir Simpson és particularment rellevant ja que aquest no es limita a optar per una visió, ignorant totalment l'altra, sinó que estableix els elements de connexió entre les dues visions i d'aquesta manera s'acosta molt a la «superació» de les distàncies teòriques entre leibnizians i newtonians. Efectivament en l'Scholium de la Section VII del seu llibre *The Doctrine and Application of Fluxions*, Simpson, després d'establir que la fluxió no es pot confondre amb la diferencial, explica la relació entre el mètode de les fluxions newtoniana i el càlcul diferencial de Leibniz dient que quan els increments infinitesimals són presos suficientment petits llavors la raó entre ells coincideix amb la raó de les fluxions. Concretament, referint-se a la raó límit dels increments, Simpson afirma que la raó d'uns increments, que cada cop es fan més petits, convergeix, abans que (aquests increments) desapareguin, més a prop que qualsevol diferència cap a la raó de les fluxions, per tant podem identificar l'una amb l'altra:

Ha estat assenyalat abans, que, encara que els Increments de les Quantitats no són, estrictament, les Fluxions, a partir d'aquests es pot deduir la Raó de les Fluxions; i apareix que com més petits es prenen aquests Increments, més la seva Raó s'aproximarà a la de les Fluxions. Per tant, si podem, d'alguna manera, trobar la Raó a la qual aquests Increments, concebent-los més i més petits, convergeixen contínuament, i a la qual aquests poden aproximar-se, abans que desapareguin, més a prop que qualsevol Diferència donada, aquesta Raó (anomenada per tal de distingir-la, *la Raó límit dels Increments*) serà, estrictament, la de les Fluxions.²⁷ (Simpson, 1750: 152)

En el mateix Scholium, Simpson mostra com és possible utilitzar el mètode de les diferencials per deduir fluxions, de manera que està acceptant la validesa del càlcul diferencial, tot i que ell prefereix moure's dins la concepció geomètrico-cinemàtica. De fet, en algunes ocasions, en el seu llibre, aplica el mètode de les diferencials com a forma alternativa al càlcul de fluxions, reconeixent que, de vegades, resulta més senzill treballar amb infinitèsims, tenint en compte que «en el límit» podem substituir-los per les fluxions.

Cerdà segueix a Simpson a l'hora d'establir les diferències entre la fluxió newtoniana i la diferencial leibniziana. Al final del «Cap 4. De las Fluxiones Superiores» del *Tratado de*

27. «It has been hinted above, that, though the Increments of Quantities are not, strictly, as the Fluxions, yet from them the Ratio of the Fluxions may be deduced; and it appears that the smaller those Increments are taken, the nearer their Ratio will approach to that of the Fluxions. Therefore, if we can, by any Means, find the Ratio to which the said Increments, by conceiving them less and less, do perpetually converge, and which they may approach, before they vanish, nearer than any assignable Difference, that Ratio (called here after for Distinction Sake, the Ratio limiting that of Increments) will be, strictly, that of the Fluxions.»

Fluxiones, es pot llegir una reflexió on es diu que, tot i que els resultats són els mateixos des de les dues visions, la fluxió és un increment *condicional*, que es produiria si la velocitat del moviment generador es mantingués constant mentre que la diferencial és un increment infinitament petit que *realment* es produeix i, per tant, només quan el moviment sigui uniforme els resultats seran iguals.

La notació leibniziana en el Tratado de Fluxiones

En qualsevol cas, la influència del corrent leibnizià sobre els textos de Cerdà va ser molt clara, on un dels elements més destacables és la utilització de la notació de diferencial. Cerdà, com molts dels seus contemporanis matemàtics a Espanya, va entrar en contacte amb els dos corrents del càlcul diferencial a Europa, i va poder decidir la notació que cregués més convenient. A més de Simpson, havia llegit nombrosos autors francesos i alemanys, com ell mateix diu. I finalment va assumir plenament la concepció geomètrico-cinemàtica de Newton i la seva definició de fluxió va ser la de Simpson, però, malgrat aquesta opció, va preferir la notació leibniziana. Allà on Simpson escriu \dot{x} , Cerdà escriu dx . No és fàcil trobar algun matemàtic de l'època que faci una cosa semblant, és a dir, que, treballant amb les fluxions newtonianes, utilitzi la notació leibniziana.²⁸

El mateix Cerdà justifica la seva opció en el Capítol «Cap. [2,3] De las fluxiones de cantidades algebraicas», de la seva primera versió:

La expresión de la fluxión de una variable expresada por sola una letra es la misma letra precedida de la letra «d», así la fluxión o diferencia de x es dx , que quiere decir la diferencia o fluxión elemento de la variable x de la misma manera que \sqrt{x} significa la raíz de x . Los ingleses lo expresan de otra suerte, esto es por la misma letra con un punto arriba así \dot{x} es la diferencia de x , pero semejante modo de expresar tiene el inconveniente [de que está] expuesto a errores de impresión [...].²⁹ (Cerdà, *Tratado de Fluxiones*, «Cap. [2,3]»: RAH, 9/2812 f. 97r.)

28. Cerdà no és l'únic matemàtic del segle XVIII que combina elements newtonians i leibnizians però sí que, adoptant plenament el concepte de fluxió dins la visió geomètrico-cinemàtica, utilitza la notació de diferencial, sense identificar fluxió newtoniana amb diferencial leibniziana. Edmund Stone (1700?-1768) en *The Method of Fluxions, both Direct and Inverse* (1730), que és, en gran part, una traducció de *Analyse des infiniments petits* de l'Hôpital, utilitza la notació newtoniana del punt sobre la variable per representar la diferencial leibniziana. És a dir, Stone identifica la fluxió newtoniana amb la diferencial leibniziana. Una cosa semblant, però a la inversa, fa Pedro Padilla (1724-1807?) en el volum dedicat al càlcul diferencial i integral del seu *Curso Militar de Mathematicas* (1753-1756). Padilla defensa la visió geomètrico-cinemàtica newtoniana i utilitza el terme de fluxió, tot i escrivint-la com a diferencial leibniziana, però per a aquest autor la fluxió és un increment infinitesimal, de manera que, com Stone, identifica fluxió i diferencial.

29. Tot aquest paràgraf està barrat i és de difícil lectura.

Els conceptes leibnizians en el text de Cerdà

L'acceptació dels principis generals de la visió geomètrico-cinemàtica no és cap obstacle perquè Cerdà es deixi influenciar no solament en la notació sinó també per molts conceptes clarament leibnizians, particularment en la primera versió del seu tractat on apareixen freqüents referències leibnizianes.

Hem escollit dos exemples en els quals Cerdà introdueix elements del càlcul diferencial leibnizià en el seu discurs.

En el primer exemple que presentem, Cerdà es desmarca de Simpson, mostrant una clara influència leibniziana, més enllà de l'ús dels infinitedsimos. Es tracta de la introducció de la quadratura d'una àrea, del capítol [11] de la primera versió del tractat de Cerdà, on l'autor estableix l'equivalència entre l'operació de calcular la fluent a partir de la fluxió —com ho fa Simpson— i la de calcular una suma d'infinits termes:

Cuadrar una curva es encontrar el área de su plano y cómo este plano no es otra cosa que la suma de todas las fluxiones que son rectángulos, según vimos al principio, todo el arte de esta cuadratura se reducirá a, dada su Ecuación de la curva, buscar la fluxión de su plano y encontrada ésta, integrando dicha fluxión se tendrá la fluente que es la suma de todas las fluxiones que la componen. (Cerdà, *Tratado de Fluxiones*, «Cap. [11]»: RAH, 9/2792/46 f. 13r.)

Com es pot veure, Cerdà utilitza, en aquesta primera versió, una terminologia leibniziana a més de considerar que quadrar una corba és calcular la suma de les seves fluxions. En la seva segona versió, tot i que Cerdà descarta la terminologia leibniziana continua mantenint l'àrea com la suma de les seves fluxions, tal com es pot llegir en el capítol 11 de la segona versió:

Cuadrar una Curva es encontrar el Área del Plano que comprende y como este Plano no es otra cosa que la suma de todas sus Fluxiones, todo el arte de esta Cuadratura se reducirá a que dada la Ecuación de la Curva, se busque la Fluxión de este Plano, cuya Fluente será el Área que buscamos. (Cerdà, *Tratado de Fluxiones*, «Cap. 11»: RAH, 9/2792/29 f. 11r.)

La idea que l'àrea per sota una corba és la suma de rectangles infinitament petits és prou potent com perquè Cerdà no l'abandoni i es permeti identificar la fluxió de l'àrea amb un increment infinitament petit, tot i que, en altres parts del seu tractat, hagi refusat aquesta identificació.

El segon exemple es troba en el «Cap. [12] Del uso de las Fluxiones para la rectificación de las curvas». La reflexió que Cerdà fa en l'apartat «Caso 2», de la primera versió, torna a recordar una concepció totalment leibniziana quan diu que, de fet, una corba és la suma

d'infinites rectes «molt petites» (espais que descriuria cada punt, per tant, fluxions) i que integrant, és a dir sumant, obtindrem la longitud de la corba:

Ya se deja ver que este Método se funda en que la línea curva se forma de infinitas rectas pequeñísimas que son los espacios que describiría el punto que la forma, esto es las fluxiones, por consiguiente integrando o sumando todas las fluxiones tendremos el valor de la tal línea, como se verá en los problemas siguientes. (Cerdà, *Tratado de Fluxiones*, «Cap. [12]»: RAH, 9/2812 f. 133r.)

Tots aquests elements analitzats en l'obra de Cerdà mostren que, per una banda, aquest autor, sense abandonar la visió geomètrico-cinemàtica newtoniana, està ben disposat a recórrer als infinitèsims si és necessari, com, per altra banda, també ho fa Simpson. Però en el cas de Cerdà, a més de la notació leibniziana, la influència del càlcul diferencial continental és molt més rellevant, particularment en els primers capítols de la seva primera versió. Efectivament, es pot trobar, en l'obra del matemàtic català, un intent de combinar conceptes dels dos corrents —l'àrea és la suma de les fluxions— que, de fet, qüestiona la mateixa definició de fluxió que Cerdà ha adoptat.

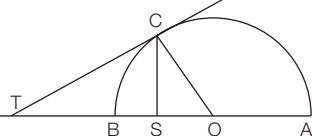
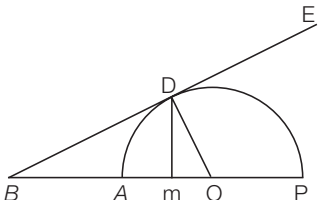
L'àlgebra en el Tratado de Fluxiones

La part dedicada a les tècniques de càlcul de fluents ocupa en el text de Cerdà 51 folis d'un total de 193 folis que té la primera versió. Tenint en compte que la part dedicada a les tècniques del càlcul de les fluents és essencialment algebraica, a l'hora de qualificar l'obra de Cerdà no seria encertat parlar d'un text on la visió geomètrica domina plenament. L'àlgebra ocupa certament un paper rellevant tant en el text de Simpson com en el de Cerdà, en extensió i pel seu contingut.

És evident que tant en el text de Simpson com en el Cerdà la geometria és molt present en les seves demostracions, però la importància de l'eina algebraica en el nou càlcul fluxional serà quelcom reivindicat per Simpson en tots els seus textos i Cerdà recollirà aquesta visió. Efectivament, Cerdà segueix a Simpson, en allò que es refereix a la inclinació cap a l'àlgebra, però d'alguna manera l'accentua. Tot i que, en general, segueix el text de Simpson quan reproduïx un exercici, de vegades afegeix alguna expressió o modifica l'exercici original. En molts casos, la modificació va en el sentit d'accentuar l'aspecte algebraic de l'exercici. Un exemple d'això es pot comprovar en el problema, «Tirar una Tangente *BE* al punto *D* del Círculo *ADP*» del capítol 6 que correspon al «Example I : 50. To draw a Right-line *CT*, to touch a given Circle *BCA*, in a given Point *C*» de la secció III (I part), del llibre de Simpson. Com es pot comprovar —a la taula adjunta de la pàgina següent— no hi ha gaires diferències entre el desenvolupament de l'un i de l'altre. Però el que aquí volem emfatitzar són les diferències en la forma de concloure l'exercici. Simpson vol insistir que el resultat coincideix amb el que s'obtidria a partir de les propietats del triangle rectangle *OCT*, men-

tre que Cerdà prefereix expressar la subtangent en funció només de la variable x . Sembla que en aquesta manera d'acabar, a diferència de l'anglès, que continua utilitzant el suport de la geometria com a garantia d'uns resultats correctes, el català vulgui arribar a un resultat algebraic més adreçat a l'aplicació pràctica i generalitzable:

TAULA 2: Cerdà reforça l'eina algebraica

A l'esquerra l'exercici segons Simpson i a la dreta segons Cerdà	
<p>Example 1</p> <p>50. Dibuixar una línia recta CT, que toqui a un cercle donat BCA, en un punt donat C</p>  <p>Sigui CS perpendicular al diàmetre AB i sigui $AB = a$, $BS = x$ i $SC = y$; llavors, per la propietat del cercle, $y^2 (CS^2) = BS \times AS (= x \times a - x) = ax - x^2$ I si calculem la fluxió, per tal de determinar la raó entre \dot{x} i \dot{y}, tenim $2y\dot{y} = a\dot{x} - 2x\dot{x}$; en conseqüència</p> $\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{2y}{a - 2x} = \frac{y}{\frac{1}{2}a - x}$ <p>la qual multiplicada per y,</p> $\frac{y\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{y^2}{\frac{1}{2}a - x}$ <p>la subtangent ST.</p> <p>D'on (suposant O com centre) tenim $OS (\frac{1}{2}a - x) : CS(y) : CS(y) : ST$, la qual cosa també sabem a partir d'altres principis.</p> <p>(Simpson, 1750, p. 54)</p>	<p>Prob[lema] 1. Tirar una tangente BE al punto D del Circulo ADP</p> <p>Sea Dm la perpendicular tirada desde el punto dado D al Eje o Diámetro AP.</p>  <p>Haciendo pues el Diámetro $AP = a$, su parte o Abscisa correspondiente $Am = x$, y la perpendicular o Ordenada $Dm = y$, por la propiedad del Circulo tendremos $Dm^2 = Am \times mP$, esto es $y^2 = ax - x^2$, cuya Fluxión, $2ydy = adx - 2xdx$ nos dará</p> $dx = \frac{2y}{a - 2x} \times dy$, por consiguiente $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{a - 2x} = \frac{y}{\frac{1}{2}a - x}$ <p>que multiplicado por y será</p> $\frac{ydx}{dy} = \frac{y^2}{\frac{1}{2}a - x} = \frac{a - x}{\frac{1}{2}a - x} \times x = Bm$, subtangente al Circulo. <p>(Cerdà, <i>Tratado de Fluxiones</i>, «Capítulo 6»: RAH, 9/2792-28 f. 8v.)</p>

L'orientació didàctica del *Tratado de Fluxiones*

El primer que s'observa en un text matemàtic de fa tres segles és el pes que hi té el llenguatge retòric, tot i haver-se ja introduït el llenguatge algebraic. Això mateix és el que es pot observar en el text de Cerdà. Tant les definicions com les demostracions recolzen en explicacions donades en llenguatge corrent, les quals, segons criteris de l'època, fan més entenedors els elements matemàtics al lector o alumne. De totes maneres, Cerdà, comparat amb altres autors del moment, no s'estén gaire en discursos retòrics. Per exemple, a diferència d'altres manuals, el seu tractat no inclou una introducció. Llegint Cerdà es té la impressió

que no compta amb una particular habilitat a l'hora d'expressar-se, ja que sovint és sobri i poc donat a grans explicacions, però justament aquesta concisió el fa ser un bon comunicador i facilita la comprensió d'allò que vol transmetre.

Cerdà està escrivint bàsicament per als seus alumnes, però, a més a més, si es llegeix el seu text, particularment quan aquest deixa de seguir el text de Simpson, hom pot adonar-se que el seu discurs és el d'un mestre dirigint-se als seus alumnes. Això és el que es pot comprovar en el «Cap 4: De las Fluxiones Superiores», on Cerdà fa una introducció al tema, que no apareix en el llibre de Simpson, quedant clara la voluntat didàctica del matemàtic català:

Hasta ahora hemos visto la Fluxiones de las Cantidades Variables que son aquellos Incrementos por los cuales una Cantidad se aumentaría si el Punto, Línea o Figura generatriz prosiguiese uniformemente con aquella velocidad que en un lugar tiene [...]. Pregunto ahora, estas pequeñas Líneas, Planos o Sólidos son constantes o son variables? Si son constantes (...) no tendrán Fluxión o lo que es lo mismo su Fluxión será = 0. Si son variables [...] han de tener también sus Fluxiones que serán Fluxión de Fluxión o Segundas Fluxiones respecto de la primera Cantidad, cuyas Fluxiones en los Capítulos Antecedentes hemos contemplado. (Cerdà, *Tratado de Fluxiones*, «Cap. 4»: RAH, 9/2812, f. 92v.)

En efecte, aquesta expressió retòrica, «Pregunto ahora...», sembla estar dirigida al seu públic, és a dir, als seus alumnes, els que va tenir al Col·legi de Cordelles de Barcelona o els del Colegio Imperial de Madrid.

5. Conclusions

Finalment, voldriem presentar les conclusions més importants de la nostra recerca sobre l'aportació de Cerdà amb el seu *Tratado de Fluxiones*, que hem intentat reflectir en aquest article.

En relació amb Cerdà, com a professor i matemàtic en el seu context social, hem volgut fer palès en primer lloc, en la nostra recerca, que la màxima preocupació del matemàtic català va estar centrada en fer útils per a la societat tant la seva pràctica com la seva obra. En segon lloc, i com a conseqüència d'aquest sentit de la utilitat, s'ha pogut concloure que el text dels primers catorze capítols del seu tractat van constituir un manual per ser utilitzat a les seves classes tant al Col·legi de Cordelles de Barcelona com al Colegio Imperial de Madrid. Finalment, cal dir que ha estat imprescindible analitzar el paper de Cerdà com a introductor del càlcul diferencial a Espanya dins el marc general del rol dels docents en el procés de configuració d'aquest nou camp matemàtic que va representar el càlcul diferencial i integral al segle XVIII. En allò que fa referència a la comparació entre el *Tratado de Fluxiones* i *The Doctrine and Application of fluxions*, el que cal constatar és que el tractat de Cerdà és una

adaptació del de Simpson, però no és una simple traducció, particularment els primers catorze capítols. Les principals aportacions que Cerdà va fer, en relació amb el text de Simpson, van ser l'accentuació del caràcter didàctic del seu discurs així com el reforçament de l'eina algebraica, començant per l'ús de la diferencial leibniziana. En relació amb el contingut específicament matemàtic, en primer lloc cal situar el treball de Cerdà dins el corrent newtonià, és a dir, dins la concepció geomètrico-cinemàtica, on el concepte de fluxió, com a mesura del moviment generador dels elements geomètrics, és central. Però cal establir, en segon lloc, que Cerdà, tot i ser un convençut newtonià, va tenir una actitud oberta a les aportacions del corrent leibnizià. La influència del càlcul diferencial continental sobre Cerdà és evident, no solament amb l'adopció de la notació de diferencial leibniziana, sinó també conduint aquest autor, en ocasions, a construccions teòriques que recorren a conceptes tant de la visió newtoniana com de la leibniziana. En definitiva, tot porta a concloure que en l'obra de Cerdà, finalment, per damunt de les diferències entre els diferents corrents del càlcul diferencial que li arriben d'Europa, preval una clara voluntat pedagògica.

phy in the Faculty of Philosophy, Columbia University, Waverly Press.

CUESTA DUTARI, N. (1976-1983), *Historia de la Invención del Análisis Infinitesimal y de su introducción en España*, Universidad de Salamanca.

GARCÍA DONCEL, M. (1998), «Los orígenes de nuestra Real Academia y los jesuitas», *Memorias de la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona*, Barcelona, Tercera Época, núm. 947, vol. LVII, n. 3.

GARMA PONS, S. (1978), «Producción matemática y cambios en el sistema productivo en la España de finales del siglo XVIII». A: GUTIÉRREZ ESTEVE, M.; CID MARTÍNEZ, J. A.; CARREIRA, A. (coord.), *Homenaje a Julio Caro Baroja*, Madrid.

— (2002), «La Enseñanza de las Matemáticas». A: PESET REIG, J. L. (dir.), *Historia de la Ciencia y de la Técnica en la Corona de Castilla*, Salamanca, Junta de Castilla y León, v. IV.

GASSIOT MATAS, L. (1996), *Tomas Cerdà i el seu «Tratado de Astronomia»*. [Treball de recerca del Centre d'Estudis d'Història de les Ciències de la Universitat Autònoma de Barcelona dirigit per Manuel García Doncel.]

GUICCIARDINI, N. (1989), *The development of newtonian calculus in Britain 1700-1800*. Cambridge University Press.

— (1999), *Reading the Principia: the debate on Newton's mathematical methods for natural philosophy from 1687 to 1736*, Cambridge University Press.

— (2009), *Isaac Newton on mathematical certainty and method*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, Londres.

HERNÁNDEZ ALONSO, E. (1973), *El jesuita Tomás Cerdà y la introducción del cálculo infinitesimal en España*. [Treball inèdit, còpia al Seminari d'Història de les Ciències del Centre Borja de Sant Cugat.]

JULLIEN, V. et al. (2015), *Seventeenth-Century Indivisibles Revisited*, editor: Jullien, Vincent Springer International Publishing Switzerland.

KNOBLOCH, E. (1990), «L'infini dans les mathématiques de Leibniz», *L'infinito in Leibniz, Problemi e terminologia*, Simposio Internazionale Roma, 6-8 Novembre 1986, Roma, 33-51.

— (2002), «Leibniz's Rigorous Foundation Of Infinitesimal Geometry By Means Of Riemannian Sums», *Synthese*, 133, (1), octubre 2002, 59-73.

— (2004), «Beyond Cartesian limits: Leibniz's passage from algebraic to 'transcendental' mathematics», *Historia Mathematica*, 33, (1), February 2006, 113-131.

LEIBNIZ, G. W. (1676), *Quadrature arithmétique du cercle, de l'ellipse et de l'hyperbole et la trigonométrie sans tables qui en est le corollaire* [títol original: *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis*]. Introduction, traduction et notes de Marc Parmentier. Texte latin édité par Eberhard Knobloch. Paris, Librairie Philosophique J. Vrin / Editions Vrin, 2004.

— (1684), «Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus». A: DE LORENZO, J. [Estudi preliminar] i MARTIN SANTOS, T. [Traducció] (1987), *Análisis Infinitesimal. Gottfried Wilhelm Leibniz*, Madrid, Tecnos.

— (1686), «De geometria recondita et Análisi indivisibilium atque infinitorum». A: DE LORENZO, J. [Estudi preliminar] i MARTIN SANTOS, T. [Traducció] (1987), *Análisis Infinitesimal. Gottfried Wilhelm Leibniz*, Madrid, Tecnos.

L'HÔPITAL, G. de (1696), *L'Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes*, Paris, de l'Imprimerie Royale.

MACLAURIN, C. (1742), *The Elements of the Method of Fluxions, demonstrated after the Manner of Ancient Geometricians*, Edimburg.

MALET, A.; PANZA, M. (2015), «Newton on Indivisibles». A: JULLIEN, V. et al., *Seventeenth-Century Indivisibles Revisited*, editor: Jullien, Vincent Springer International Publishing Switzerland.

MASSA-ESTEVE, M. R. (2015), «The Role of Indivisibles in Mengoli's Quadratures». A: JULLIEN, V. et al., *Seventeenth-Century Indivisibles Revisited*. Editor: Jullien, Vincent, Springer International Publishing Switzerland.

MASSA-ESTEVE, M. R.; ROCA-ROSELL, A.; PUIGPLA, C. (2011), «'Mixed' Mathematics in Engineering Education in Spain. Pedro Lucuce's course at the Royal Military Academy of Mathematics of Barcelona

in the Eighteenth century», *Engineering Studies*, 3, (3), 233-253.

NAVARRO BROTONS, V. (2001), «Scientific activity in Spain and the Role of the Jesuits (1680-1767)». A: BRIZZI, G. P.; GRECI, R., *Gesuiti e Università in Europa (secoli XVI-XVIII)*, Parma, Arti del Convegno di studi.

NAVARRO LOIDI, J. (2008), «Lección de Artillería by Tomás Cerdá and the Revolution of the spanish Artillery during the 18th Century», *3rd International Conference of the European Society for the History of Science (ICESHS)*, Viena, Setembre 2008.

— (2013), *Don Pedro Giannini o las Matemáticas de los artilleros del siglo XVIII*, Segòvia, Asociación Cultural «Biblioteca de Ciencia y Artillería».

— (2013b), «La incorporación del cálculo diferencial e integral al Colegio de Artillería de Segovia». *Lull*, v. 36, n. 78, 2n semestre 2013, Universidad de Zaragoza, 333-358.

NEWTON, I. (1671), *The Method of Fluxions and Infinite Series*, translated from the Author's Latin original [*Tractatus de Methodis Serierum et Fluxionum*] not yet made public [...] by John Colson, M.A. and F.R.S. Londres, printed by Henry Woodfall, 1736.

— (1687), *The Mathematical Principles of Natural Philosophy*, translated into English by Andrew Motte, Nova York, 1846. [Títol original: *Philosophiae naturalis Principia Mathematica*. Imprimatur S. Pepys, Reg. Soc. Praeses. Londini.]

PADILLA Y ARCOS, P. (1756), *Curso militar de Matemáticas, sobre las partes de esas Ciencias, pertenecientes al Arte de la Guerra*, Madrid, Antonio Mañón.

PUIG-PLA, C. (2006), *Física, Tècnica i Il·lustració a Catalunya. La cultura de la utilitat: assimilar, divulgar, aprofitar*, Universitat Autònoma de Barcelona. [Tesi doctoral]

ROCA-ROSELL, A. (2014), *Reial Acadèmia de Ciències i Arts de Barcelona (1764-2014): 250 anys d'història*, RACAB i Diputació de Barcelona.

SIMPSON, T. (1737), *A new treatise of fluxions*, Londres, printed by Tho. Gardner.

— (1750), *The Doctrine and Application of Fluxions*, Londres, printed by J. Nourse.

UDÍAS, A. (2005), «Los libros y manuscritos de los profesores de matemáticas del colegio imperial de Madrid, 1627-1767», *Archivum Historicum Societatis Iesu*, 148, a. LXXIV, 369.

— (2010), «Profesores de matemáticas en los colegios de la Compañía de España, 1620-1767», *Archivum Historicum Societatis Iesu*, 157, a. LXXIX, 3.

WENDLINGEN, J. (1753-1756), *Elementos de la Mathematica*, 4 vol., Madrid, Joachin Ibarra.

WOLFF, C. (1713-1715), *Elementa Matheseos Universae*, Ginebra, apud Henricum-Albertum Gosse & socios.