

# L'EXPERIMENT DEL CUB.

## SEGONA PART: CÀLCUL DE LA CONSTAN DE PLANCK

Albert Garcia-Benadi

### 1. Propòsit

L'experiment del cub és una pràctica de mesurament que, juntament amb coneixements obtinguts de manuals, ens permet determinar la constant d'Avogadro i la constant de Planck a partir del mesurament de les arestes i de la massa d'un cub d'alumini proposat en el treball [1] i que la Secció Catalana de Metrologia va presentar en la celebració del Dia Mundial de la Metrologia l'any 2019, que es va fer al Centre de Cultura Contemporània de Barcelona (CCCB), i que presentem en format d'article per fer-ne una difusió més àmplia, així com per detallar numèricament els aspectes més rellevants de l'experiment. La finalitat no és repetir l'excel·lent article [1], sinó, incloent-hi l'avaluació de la incertesa, posar les bases per a les fitxes explicatives per als diferents nivells de l'ensenyament, que està preparant la Secció Catalana de Metrologia.

En el [2] ja es va detallar com seria l'experiment pel càlcul de la constant d'Avogadro, i en aquest article relatarem la sistemàtica i càlculs per determinar la constant de Planck, que té el valor de  $6,626\ 07 \cdot 10^{-34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$ .

La finalitat de l'experiment, en aquesta darrera part, és realitzar la connexió entre els processos fisicoquímics a escala atòmica i molecular mitjançant la constant de Planck ( $h$ ), que és la constant fonamental de la física quàntica, mitjançant el valor calculat de la constant d'Avogadro determinada en [1-2].

### 2. Base teòrica

El primer que necessitarem és vincular la constant de Planck amb la constant d'Avogadro, i per fer-ho pensarem en un experiment en un sistema quàntic en què la massa connectada amb l'escala dels pesos atòmics fa un paper rellevant. L'experiment consisteix en el canvi de nivell energètic de l'electró d'un àtom d'hidrogen per la interacció d'un fotó, per tant aquest experiment és la ionització de l'àtom d'hidrogen. En la realització de l'experiment emprarem l'aproximació no relativista i tenint en compte només l'atracció electrostàtica del nucli, les solucions de l'equació de Schrödinger tenen energies ( $j = 1, 2, \dots$ )

$$E = -m' \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{(2\pi)^2}{2 \cdot h^2} \frac{1}{j^2} \quad (1),$$

en utilitzar un fotó és important recordar la relació entre la freqüència i l'energia del fotó

$$E = h \cdot \nu \quad (2),$$

Recordem que la longitud d'ona,  $\lambda$ , té una relació amb la seva freqüència,

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \quad (3),$$

En aquest punt fem la unió de la hipòtesi de l'experiment que consisteix amb la longitud d'ona del fotó necessari per poder canviar de nivell (de l' $a$  al  $b$ ) de l'àtom d'hidrogen, afegint un paràmetre, que anomenarem  $R$ , per englobar tots els paràmetres que no depenguin del nivell

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c} = \frac{\Delta E}{h \cdot c} = R \left( \frac{1}{j_a^2} - \frac{1}{j_b^2} \right) \quad (4),$$

per tant, el paràmetre  $R$  és

$$R = m' \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{(2\pi)^2}{h \cdot c \cdot 2 \cdot h^2} \quad (5),$$

$m'$  és la massa reduïda,  $m_e$  és la massa de l'electró i  $m_n$  és la massa del nucli.

$$m' = \frac{m_e \cdot m_n}{m_e + m_n} \quad (6)$$

Fent la hipòtesi raonable que la massa del nucli és molt més gran que la de l'electró, implica que  $m'$  es pot considerar com la  $m_e$  i obtenint la constant de Rydberg,  $R_\infty$

$$R_\infty = m_e \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{(2\pi)^2}{h \cdot c \cdot 2 \cdot h^2} \quad (7),$$

I si introduïm la constant d'estructura fina com

$$\alpha = \frac{e^2}{2 \cdot \epsilon_0 \cdot h \cdot c} \quad (8),$$

Obtenim una relació entre la massa de l'electró i la constant de Planck (9)

$$R_\infty = \frac{\alpha^2 \cdot m_e \cdot c}{2 \cdot h} \quad (9),$$

L'equació (8) la reescrivim aïllant la constant de Planck, que és el terme que ens interessa (10)

$$h = \frac{\alpha^2 \cdot m_e \cdot c}{2 \cdot R_\infty} \quad (10),$$

I en què descomponem la massa de l'electró mitjançant la relació que ens ofereix la massa relativa i la constant d'Avogadro [2]; per tant, obtenim la relació entre la constant de Planck i la constant d'Avogadro (11)

$$h = \frac{\alpha^2 \cdot A_r(e) \cdot M_u \cdot c}{2 \cdot R_\infty \cdot N_A} \quad (11),$$

en què  $M_u$  és la massa molar unitària, i  $A_r(e)$  és la massa relativa de l'electró. Si analitzem (11) veiem que hi ha termes que són constants i que no depenen de la massa, i les podríem definir com  $Q_u$  (12)

$$Q_u = \left( \frac{\alpha^2 \cdot c}{2 \cdot R_\infty} \right) \cdot A_r(e) \quad (12),$$

Així doncs, l'equació final que treballarem (5) ens donarà el valor de la nostra constant de Planck.

$$h = \frac{Q_u \cdot M_u}{N_A} \quad (13)$$

És interessant veure que a (13) també es pot representar la constant de Planck amb els valors mesurats de la pesada i la longitud de l'aresta del cub, tot recordant (14) per obtenir (15).

$$N_A = \frac{M(^{12}\text{C})}{m_a(^{12}\text{C})} = \frac{M_u}{m_u} = 4 \cdot M_u \cdot A_r(\text{Al}) \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{d^3}{a^3} \quad (14),$$

(6)

$$h = \frac{Q_u \cdot M_u}{N_A} = \frac{\alpha^2 \cdot A_r(e) \cdot c \cdot a^3}{2 \cdot 4 \cdot R_\infty \cdot A_r(\text{Al})} \cdot \frac{m}{d^3} \quad (15)$$

### 3. Propagació de la incertesa

La propagació de la incertesa [3] ens donarà l'interval de confiança del mesurament. Partim de l'equació (10) com a referència:

$$u'(h) = \sqrt{\left( \frac{\partial(h)}{\partial Q_u} \cdot u(Q_u) \right)^2 + \left( \frac{\partial(h)}{\partial M_u} \cdot u(M_u) \right)^2 + \left( \frac{\partial(h)}{\partial N_A} \cdot u(N_A) \right)^2}, \quad (16)$$

en què és la incertesa estàndard de diverses constants amb incertesa coneguda, és la incertesa estàndard de la massa molar unitària i és la incertesa estàndard de la constant d'Avogadro obtinguda en [2]. Si fem les derivades parcials obtenim:

$$u'(h) = \sqrt{\left( \frac{M_u}{N_A} \cdot u(Q_u) \right)^2 + \left( \frac{Q_u}{N_A} \cdot u(M_u) \right)^2 + \left( \frac{Q_u \cdot M_u}{N_A^2} \cdot u(N_A) \right)^2} \quad (17)$$

L'equació (17) també es pot representar comprimida de la manera següent, ja que tenim una relació de productes, i obtenim:

$$\frac{u'(h)}{h} = \sqrt{\left( \frac{u(Q_u)}{Q_u} \right)^2 + \left( \frac{u(M_u)}{M_u} \right)^2 + \left( \frac{u(N_A)}{N_A} \right)^2} \quad (18)$$

Considerem que el factor de cobriment és igual a 2 aplicant el teorema central del límit i, per tant, la incertesa eixamplada<sup>1</sup> de mesura és:

$$U(h) = 2 \cdot u(h). \quad (19)$$

### 4. Presa de dades

Utilitzarem les mesures determinades en [2], figura 1, de la qual vam obtenir un valor de la constant d'Avogadro de  $(6,052 \pm 0,035) \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ . I els valors pel càlcul de  $Q_u$  els obtenim del CODATA, 2018 [4], en què:

- El valor de la constant d'estructura fina  $\alpha$  és  $0,007 297 353 \pm 0,000 000 003$  sense unitats, ja que és adimensional.
- Constant de Rydberg  $R_\infty$  és de  $10 973 731,568 160 \pm 0,000 021 \text{ m}^{-1}$
- La velocitat de la llum al buit  $c$  és de  $299 792 458 \text{ m s}^{-1}$ , i no té incertesa associada.
- La massa atòmica relativa de l'electró  $A_r(e)$  és de  $0,000 548 58 \pm 0,000 000 002$ , i no té unitats.

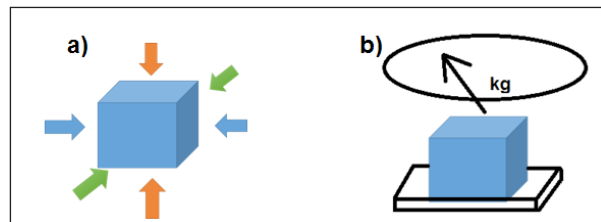


FIGURA 1. a) Mesurament de la longitud de les arestes del cub, b) pesada del cub.

### 4.3. Resultats

A continuació es detallen els valors numèrics obtinguts en la celebració del Dia Mundial de la Metrologia (DMM) del 2019, celebrat a les instal·lacions del CCCB i detallats ja en [2].

Paràmetres ambientals de l'experiment:

- Temperatura:  $20,18 \text{ }^\circ\text{C}$
- Densitat de l'aire de Barcelona:  $1,2 \text{ kg/m}^3$

Paràmetres obtinguts de la bibliografia científica:

- Longitud de l'aresta de la cel·la unitària ( $a$ ):  $404,96 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ , amb una incertesa eixamplada associada de  $10^{-14} \text{ m}$  [4]
- Massa atòmica relativa de l'alumini ( $A_r(\text{Al})$ ):  $26,981 538 4$ , amb una incertesa eixamplada associada de  $0,000 000 3$  [5].

1. Malgrat que el *Vocabulari internacional de metrologia* (TERMCAT, 2015) recull el terme *incertesa expandida*, els editors d'aquest número del butlletí consideren que és preferible emprar el terme *incertesa eixamplada*, i proposaran aplicar aquest canvi en la pròxima actualització del vocabulari esmentat.

- Massa atòmica de carboni 12: 12 g/mol, sense incertesa associada, ja que és una definició exacta (abans del 2019).

Paràmetres dels patrons:

- El peu de rei té una resolució de 0,01 mm i una incertesa eixamplada de 0,01 mm.
- La bàscula té una resolució de 0,001 g i una incertesa eixamplada de 0,001 g.

Les mesures obtingudes del mesurament de l'aresta i de la pesada del cub són les que es recullen en les taules 1 i 2, respectivament.

TAULA 1. Mesures de l'aresta del cub

Mesures	Joc de cares		
	Orientació 1 (mm)	Orientació 2 (mm)	Orientació 3 (mm)
1	19,69	19,56	19,57
2	19,61	19,56	19,58
3	19,65	19,56	19,57
4	19,60	19,59	19,57
5	19,61	19,55	19,57
6	19,58	19,56	19,58

TAULA 2. Mesures de la massa del cub

Mesures	W (g)
1	20,192
2	20,192
3	20,192
4	20,192
5	20,192

A partir de les dades obtingues calculem el valor de cadascuna de les variables que ens són d'interès:

Paràmetre	Valor	Incertesa eixamplada
<b>d</b>	19,59 mm	0,02 mm
<b>m</b>	20,189 g	0,002 g
<b>N</b>	$4,528 \cdot 10^{23}$	$0,014 \cdot 10^{23}$
<b>m<sub>a</sub> (Al)</b>	$4,458 \cdot 10^{-23}$ g	$0,014 \cdot 10^{-23}$ g
<b>m<sub>a</sub> (<sup>12</sup>C)</b>	$1,983 \cdot 10^{-23}$ g	$0,006 \cdot 10^{-23}$ g
<b>m<sub>u</sub></b>	$1,652 \cdot 10^{-24}$ g	$0,005 \cdot 10^{-24}$ g
<b>N<sub>A</sub></b>	$6,052 \cdot 10^{23}$ mol <sup>-1</sup>	$0,035 \cdot 10^{23}$ mol <sup>-1</sup>
<b>M<sub>u</sub></b>	0,999 8 g mol <sup>-1</sup>	0,006 6 g mol <sup>-1</sup>

I si detallem els valors del càlcul de la constant de Planck obtenim que:

Paràmetre	Valor	Incertesa eixamplada
<b>N<sub>A</sub></b>	$6,052 \cdot 10^{23}$ mol <sup>-1</sup>	$0,035 \cdot 10^{23}$ mol <sup>-1</sup>
<b>M<sub>u</sub></b>	0,999 8 g mol <sup>-1</sup>	0,005 8 g mol <sup>-1</sup>
<b>α</b>	0,007 297 353	0,000 000 003
<b>R<sub>∞</sub></b>	$10 973 731,568 160$ m <sup>-1</sup>	$0,000 021$ m <sup>-1</sup>
<b>c</b>	$299 792 458$ m s <sup>-1</sup>	---
<b>A<sub>r</sub>(e)</b>	0,000 548 58	0,000 000 02
<b>Q<sub>u</sub></b>	$3,990 312 714 \cdot 10^{-7}$ m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>	$0,000 000 006 \cdot 10^{-7}$ m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>
<b>h</b>	$6,595 499 \cdot 10^{-31}$ g m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>	$0,054 700 \cdot 10^{-31}$ g m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>

Després del 2019, amb aquestes dades i el valor de la constant de Planck, ara fixat, de  $6,626 07 \cdot 10^{-34}$  kg m<sup>2</sup> s<sup>-1</sup>, veiem que el nostre valor està dins el nostre interval de confiança, tal com mostra la figura 2.

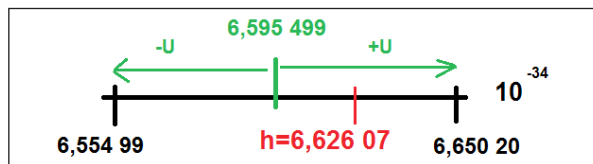


FIGURA 2. Valoració visual del valor reconegut de  $h$  (de color vermell) respecte del valor mesurat amb la incertesa eixamplada (de color verd)

## 5. Conclusions

Hem estat capaços de trobar el valor de la constant de Planck, partint del valor del kilogram, amb les dades obtingudes en [2] dins el nostre interval de confiança.

El valor de la constant de Planck es va determinar com a constant en la revisió del sistema internacional d'unitats, acció adoptada per la Conferència General de Pesos i Mesures (CGPM) el passat 2019. Ara, l'experiment determina el valor en massa del patró internacional del kilogram.

Els materials i les fitxes explicatives es posaran a disposició dels centres educatius.

## Referències

- [1] DAVIS, R. S. (2015). «What is a kilogram in the Revised International System of Units (SI)?». *Journal of Chemical Education*, vol. 92, núm. 10, 1604-1609. DOI: 10.1021/acs.jchemed.5b00285.
- [2] GARCIA-BENADÍ, A. «L'experiment del cub. Primera part: càlcul de la constant d'Avogrado». *Butlletí de la Secció Catalana de Metrologia* [recurs electrònic], vol. 4 (2021), 4-8. enllaç.
- [3] JOINT COMMITTEE FOR GUIDES IN METROLOGY. *Evaluation of measurement data: Guide to the expression of uncertainty in measurement. JCGM 100:2008* [en línia]. JCGM, 2008. [www.bipm.org/utls/common/documents/jcgm/JCGM\\_100\\_2008\\_E.pdf](http://www.bipm.org/utls/common/documents/jcgm/JCGM_100_2008_E.pdf)
- [4] CODATA 2018 (enllaç)