A la primera part del treball en Carles Noguera presenta semànticament i sintàcticament les lògiques borroses conegudes. La presentació sintàctica consisteix en una sèrie de càlculs a l'estil de Hilbert, mentre que la semàntica consisteix a donar varietats de MTL-àlgebres. S'examina també aquella part de la semàntica algebraica que només usa l'interval $[0,1]$ com a conjunt de valors de veritat (l'anomenada *semàntica estàndard*), és a dir, aquelles MTL-àlgebres que estan definides sobre l'interval $[0,1]$ per una t-norma contínua per l'esquerra. En els casos en què és possible, es dóna la prova de la completesa de les lògiques borroses respecte a la semàntica estàndard.

La segona part està dedicada íntegrament a aquelles lògiques borroses en què la negació és involutiva, és a dir, en què val la llei d'eliminació de la doble negació. Es presenta la lògica IMTL com a la mínima lògica borrosa involutiva i com a generalització de la lògica infinitovalorada de Lukasiewicz. Es recullen els mètodes de Jenei per a la construcció d'algunes IMTL-àlgebres. S'estudien les nocions d'IMTL-àlgebra perfecta i bipartida i es posen en relació amb alguns dels mètodes de Jenei. Finalment, es donen alguns primers resultats sobre IMTL-àlgebres n-contractives.

Aquesta segona part del treball ha estat aceptada per publicar a la revista *Archive for Mathematical Logic.*

En Carles Noguera va néixer a Calella el 1978 i es va llicenciar en matemàtiques per la UB el 2001. És becari FPI a l'Institut d'Investigació en Intel·ligència Artificial (IIIA))del CSIC des del juliol de 2002. És estudiant de doctorat en el Programa de Lògica i Fonaments de la Matemàtica de la UB des del 2002 i, actualment, treballa en la tesi doctoral sota la direcció dels doctors Francesc Esteva (IIIA, CSIC) i Joan Gispert (Facultat de Matemàtiques, UB).

Ventura Verdú
UB

Llibres

En aquesta secció de la *SCM/Notícies*, hi van apareixent recencions de llibres de matemàtiques de publicació recent. El criteri general és que es tracti d'un llibre de divulgació o de recerca, i que estigui escrit en català o d'autor català. Això no treu, però, que poguem publicar recencions de llibres que, no complint aquest criteri, siguin prou interessants.

Animem tots els lectors de la revista a proposar títols de llibres que cregueu oportuns per a aquesta secció. Podeu enviar-nos les vostres propostes (i, fins i tot, recencions ja fetes) a l'adreça electrònica de la redacció (scm@iecat.net) o directament a l'editor.

Singularities of Plane Curves

Autor: Eduard Casas Alvero
Editorial: Cambridge University Press

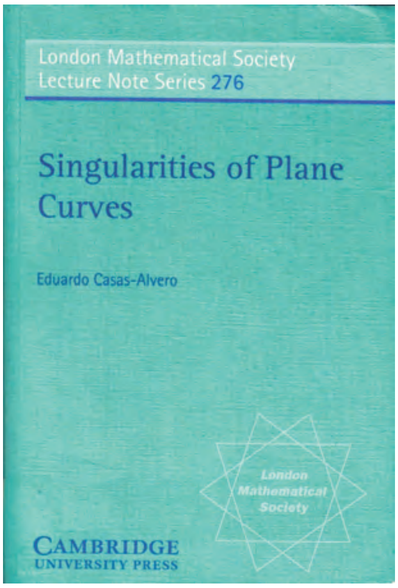
Les singularitats de varietats algebraiques o analítiques són un d'aquells camps d'estudi on s'apliquen mètodes i resultats de diferents branques, aparentment allunyades, de les matemàtiques. En aquest cas hi trobem l'àlgebra, la topologia, l'anàlisi i sobretot la geometria. Dels diversos tipus de singularitats, les que s'ha aconseguit entendre més bé són, sens dubte, les que es troben en les corbes planes, gràcies a contribucions de grans matemàtics com Newton, Riemann, Halphen, Enriques, Noether, Zariski i molts altres. En aquest llibre es presenta la teoria de les singularitats de corba plana, de manera autocontinguda i assequible per a qualsevol matemàtic, abarcant des dels resultats clàssics fins a alguns que apareixen publicats per primera vegada en aquesta ocasió. Serà un bon punt de partida per a qualsevol que es vulgui introduir en el món fascinant de les singularitats, difícilment substituible per altres llibres existents, ja que a l'abundant literatura sobre corbes algebraiques, on sempre apareixen les singularitats, molt sovint ho fan de manera marginal; en aquest llibre tenen tot el protagonisme. L'autor, Eduard Casas Alvero, de la Universitat de Barcelona, ha fet nombroses aportacions a la teoria de les singularitats de corbes i de morfismes en superfícies.

Detallem el contingut dels diferents capítols, contextualitzant-ne breument els resultats. El llibre s'inicia amb un capítol de preliminars, i tot seguit es presenta l'algorisme de Newton-Puiseux per parametritzar branques de corba plana. Una corba algebraica del pla és el lloc geomètric dels punts $P = (x, y)$ que satisfan una equació polinòmica (implícita) $f(x, y) = 0$. Si P és un punt de la corba on $\partial f/\partial y(P) \neq 0$, el teorema de la funció implícita ens diu que podem aïllar $y(x)$ en un entorn de P i donar una equació explícita, per exemple en forma de sèrie de Taylor. Les singularitats són els punts on això no es pot fer perquè el gradient de f és nul. Per resoldre aquesta dificultat, Newton introduí el polígon que ara porta el seu nom i les sèries amb exponents fraccionaris; durant la primera meitat del segle XIX el matemàtic francès Victor Puiseux va desenvolupar el mètode de Newton i va demostrar que en un entorn d'una singularitat podem aïllar $y(x)$ com a *sèrie de Puiseux*, de la forma

$$y(x) = a_0 + a_1 x^{\frac{1}{n}} + a_2 x^{\frac{2}{n}} + a_3 x^{\frac{3}{n}} + \cdots$$

on n és un nombre natural, i $a_0, a_1, \ldots$ són complexos. El teorema de Puiseux té conseqüències importants en l'àlgebra i l'anàlisi, com els teoremes de preparació i divisió de Weierstrass, i també permet construir la clausura algebraica del cos de sèries de Laurent. Amb aquests resultats es tanca el capítol 1.

La solució $y(x)$ obtinguda pel mètode de Newton-Puiseux, però, no és única. Efectivament, sobre els complexos $y = x^{1/n}$ és una funció que admet n determinacions i per tant aquesta $y(x)$ també. A més, en una única singularitat hi poden confluir diferents branques, i això comporta encara més solucions. La riquesa dels fenòmens descoberts va fer que les singularitats guanyessin ràpidament un lloc en el desenvolupament de la geometria algebraica plana. Per exemple, tenen un paper clau en les fórmules de Plücker que relacionen els invariants numèrics d'una corba, o en el teorema de Bézout, que ens diu que en el pla projectiu dues corbes $f(x, y) = 0$ i $g(x, y) = 0$ tenen (grau f)$\times$(grau g) punts d'intersecció *si els comptem amb multiplicitats adequades*. El resultat de Bézout, doncs, generalitza el fet que un polinomi $f(y)$ té (grau f) arrels complexes, comptades amb multiplicitat. Les qüestions lligades a la multiplicitat d'intersecció s'introdueixen al capítol 2 d'aquest llibre, on es defineixen branques, anells locals, parametritzacions, multiplicitat d'intersecció i sistemes lineals, i es veu la regla de Halphen per calcular la multiplicitat d'intersecció de dues corbes a partir de les seves sèries de Puiseux.



Dues corbes sense singularitats tenen multiplicitat d'intersecció 2 (o més) en un punt si i només si tenen la mateixa direcció en aquell punt. Això conduí Max Noether a la invenció, per a cada punt i cada direcció, d'un *punt infinitament proper*; actualment aquesta noció té un sentit totalment rigorós formalitzat amb l'anomenat *procés d'explosió de punts*, que Casas introdueix al capítol 3. A partir de la idea de Noether, el geòmetra italià Federigo Enriques va desenvolupar tot un mètode de càlcul amb punts infinitament propers de diversos tipus, útil per a l'estudi de famílies de corbes, punts singulars sobre corbes, i ideals en anells de funcions, la potència del qual es comprova abastament en aquest llibre. Noether també demostrà que les singularitats de corba es poden *resoldre* (és a dir, eliminar o si més no simplificar molt) amb transformacions de Cremona del pla, és a dir, transformacions del tipus

$$(x, y) \mapsto \varphi(x, y) = \left(\frac{p(x, y)}{q(x, y)}, \frac{r(x, y)}{s(x, y)} \right)$$

on p, q, r i s són polinomis, tals que existeix una transformació inversa $\psi(x, y)$ del mateix tipus.

D'altra banda, Bernhard Riemann —contemporani de Puiseux— havia resolt les singularitats de manera totalment diferent. Per ell, les funcions $y(x)$ amb diverses determinacions $y(x)$ calia considerar-les definides, no pas sobre el pla complex $x \in \mathbf{C}$, sinó sobre una *superfície de Riemann* S apropiada per a la funció del cas. D'aquesta manera obtenim una funció $y(z), z \in S$, amb una sola determinació, però perdem la informació sobre les singularitats. El ràpid desenvolupament de la topologia als inicis del segle vint va conduir, els primers anys trenta, a la noció d'equivalència topològica de singularitats de corba, i a la demostració que aquesta és equivalent a la igualtat de certs invariants combinatoris lligats als punts infinitament propers. Oscar Zariski, matemàtic d'origen rus format a Itàlia i que acabà creant una influent escola de geometria algebraica als Estats Units, codificà aquesta informació en la seva noció d'*equisingularitat* el 1965. Així mateix, es va veure que la topologia de la superfície de Riemann estava determinada pels tipus d'equisingularitat i el grau de la corba. A dia d'avui podem formular moltes condicions que són equivalents a l'equisingularitat, i estudiar les singularitats de corba plana des de molts punts de vista diferents. A la segona meitat del capítol 3 d'aquest llibre trobem una demostració de l'existència de resolucions per explosió de punts, així com la definició d'equisingularitat, basada en els *diagrames d'Enriques*, que són invariants combinatoris en forma d'arbre del *clúster* de punts infinitament propers lligats a una resolució. Per caracteritzar els diagrames que efectivament apareixen en les singularitats i entendre els fenòmens lligats a la imposició de condicions de pas per punts infinitament propers són necessàries les anomenades *desigualtats de proximitat* i l'algorisme de *descàrrega*, que trobem al capítol 4. Al capítol 5 es demostra el teorema d'Enriques que relaciona els exponents característics de Puiseux amb els diagrames, i el seu lligam amb el semigrup d'una branca (invariant algebraic que també es pot usar per definir l'equisingularitat).

Els darrers tres capítols són de caràcter més especialitzat, i s'hi mostren clarament les preferències de l'autor. El capítol 6 conté la teoria de les corbes polars i les seves singularitats. S'hi obté la fórmula de Plücker, i s'introdueix l'invariant μ de Milnor. S'hi inclouen els invariants polars i teoremes de descomposició. Al capítol 7 trobem l'estudi local de les famílies lineals de corbes planes, amb una versió del teorema de Bertini, i resultats sobre la determinació finita per als tipus topològic i analític de les singularitats. El darrer capítol comença amb l'estudi de les valoracions de l'anell de sèries en dues variables, i s'hi inclou la relació entre els clústers de punts infinitament propers i els ideals complets de Zariski. El llibre es completa amb un apèndix dedicat a resultats globals presentats com aplicacions de la teoria local desenvolupada. Concretament, s'hi demostren el teorema d'Abhyankar-Moh sobre immersions de la recta afí al pla afí, i el teorema de Jung sobre els generadors del grup d'automorfismes algebraics del pla afí.

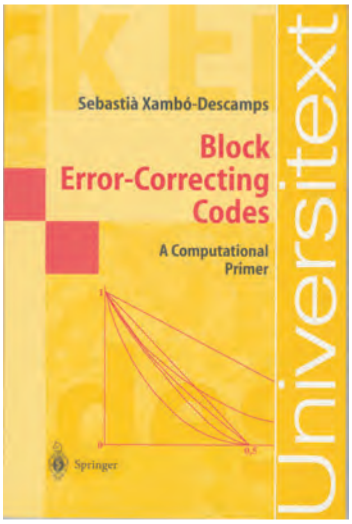
El llibre de Casas està plantejat des d'una perspectiva nova, que utilitza com a eina essencial els clústers de punts infinitament propers, recuperant fins a cert punt la visió d'Enriques, però amb rigor actual. Serà una eina de referència bàsica per tot aquell qui treballi sobre singularitats o simplement s'hi interessi de manera puntual. Inclou nombroses il·lustracions i, a cada capítol, una secció de problemes, que ajuden a l'assimilació del contingut i el fan adequat també com a llibre de text d'un curs sobre singularitats.

Joaquim Roe
UAB

Block Error-Correcting Codes. A Computational Primer

Autor: Sebastià Xambó-Descamps
Editorial: Universitext, Springer

Els codis correctors d'errors, introduïts els anys quaranta del segle passat, són un ingredient essencial de qualsevol mecanisme de transmissió digital d'informació. La fidelitat, per exemple, de la comunicació via satèl·lit o dels aparells reproductors de música gravada en discs compactes, està basada en enginyosos procediments matemàtics de codificació i descodificació de la informació digital. L'existència de *soroll* en els canals transmissors, provoca inevitablement errors en la transmissió d'alguns dígits i es fa necessari codificar la informació tramesa de manera que el receptor pugui detectar i corregir els errors produïts durant la transmissió.



La teoria de codis (correctors d'errors) gaudeix avui dia d'un cos teòric sòlidament estructurat en una fructífera imbricació de tècniques molt diverses d'aritmètica, combinatòria, àlgebra, probabilitat, teoria de nombres i geometria algebraica. Es tracta d'una disciplina en plena expansió, motiu d'una intensa activitat de recerca, i que constitueix un dels exemples més rellevants de les aplicacions tecnològiques de la matemàtica.

El llibre que ens ocupa ofereix una introducció als aspectes més bàsics d'aquesta matèria, amb una declarada intenció de suport a la docència. De fet, el llibre es configura explícitament com una proposta de disseny d'una assignatura semestral sobre codis, adreçada als alumnes d'una llicenciatura de matemàtiques o d'una enginyeria en informàtica o en telecomunicacions.

Els continguts es reparteixen en quatre capítols. Al primer capítol trobem una excel·lent introducció a la problemàtica general dels codis correctors d'errors. Un cop presentats els conceptes bàsics sobre codis i el procés de codificació en bloc, es fan paleses les condicions perquè un codi sigui útil: ha de tenir taxa de transmissió i capacitat correctora altes, i ha d'admetre un algorisme de descodificació eficient. S'introdueixen famílies arquetípiques de codis (Hamming, Reed-Solomon, Reed-Muller, Hadamard) que permeten il·lustrar la dificultat de veure satisfetes totes aquestes condicions simultàniament. També es mostra com aquestes qüestions fonamentals admeten un tractament matemàtic i informàtic més eficient en el cas dels codis lineals, mitjançant eines com les matrius generadora i de control, que simplifiquen notablement els processos de codificació i descodificació.

Al segon capítol s'ofereix una breu revisió de la teoria elemental de cossos finits, que cobreix els aspectes necessaris per estudiar els codis amb més profunditat: existència i construcció de cossos finits, automorfisme de Frobenius, estructura del grup multiplicatiu d'un cos finit, polinomis minimals, etc.

Finalment, als capítols tres i quatre s'estudia amb profunditat la problemàtica presentada al primer capítol, en el cas de dues famílies especialment importants de codis lineals: els codis cíclics, fabricats a partir d'ideals de l'anell de polinomis, i els codis alternants, fabricats a partir de matrius alternants. Aquests codis gaudeixen d'una rica estructura matemàtica que permet controlar prou bé els valors dels seus paràmetres i, també, obtenir algorismes molt eficients de descodificació. A més a més, contenen com a casos particulars la major part dels codis estudiats anteriorment, i altres famílies fonamentals de codis, com els codis BCH, els codis de Golay i els codis de Goppa clàssics. Tot plegat, el llibre suma dues-centes seixanta-cinc pàgines, conté setanta-set algorismes, cent-disset exercicis i vuitanta-tres problemes proposats.

Ens trobem davant d'una obra enormement atractiva, que pot interessar a un ampli sector de lectors, més enllà de l'estricte servei docent que l'ha motivada. La tria dels continguts és molt encertada i els temes estan presentats i exposats de manera magistral. Des d'un punt de vista didàctic, el llibre presenta una innovació que mereix una menció especial. Cada nou objecte matemàtic considerat en el text, s'acompanya immediatament del disseny i implementació d'un algorisme que permet el seu càlcul efectiu. Comparteixo la opinió de l'autor en el sentit que el disseny d'un algorisme per calcular un objecte en permet una comprensió més profunda i, a la vegada, la implementació efectiva de l'algorisme redunda en una millor comprensió de l'estructura de l'algorisme i, per tant, també de l'objecte a calcular. Aquesta interacció mútua dels aspectes matemàtics i computacionals és un dels aspectes més valuosos del llibre i, al meu parer, hauria de ser considerada en la confecció de la majoria dels llibres de text de matemàtiques a nivell de llicenciatura o enginyeria.

Enric Nart
UAB

Problemes

Tornem a la cita i, ara, el lapse de temps ha estat força més curt!

Hem de començar demanant disculpes als nostres entusiastes col·laboradors: un comportament inesperat d'una macro de TEX va convertir tot d'arrels cúbiques en triples d'arrels quadrades, cosa que feia que l'enunciat del problema **A.62** aparegués tot proposant una propietat trivialment falsa, tal com ens feren notar immediatament molts amables lectors. El mal, ai làs!, ja estava fet i, tot i que de seguida vam publicar l'esmena de l'errada a la pàgina web de la Societat, som conscients que el missatge no haurà arribat a totes les persones interessades.

Així, doncs, tornem a proposar el problema **A.62**, amb l'esperança que, ara, els déus ens seran propicis.

Volem pensar que és la creença que els intervals entre número i número de la *SCM/Notícies* són prou llargs i no la desconfiança produïda per l'errada, la causa que no haguem rebut més que una sola solució als problemes supervivents del número 20, la qual es deu a n'Enric Ventura, de la UPC, a qui agraïm el seu treball!

Com sempre, tornem a agrair el seu treball als lectors que ens proporcionen enunciats de problemes i/o ens n'envien les solucions. El correu electrònic pels enviaments ara és cromero@xtec.net (atenció: la *Xarxa Telemàtica Educativa de Catalunya* ha canviat el seu domini!) i els materials escrits en TEX o LATEX ens faciliten força la feina. Moltíssimes gràcies!

Problemes proposats

A62. (Proposat per José Luis Díaz-Barrero, UPC) Siguin $a_1, a_2, \cdot s, a_n$ nombres positius. Proveu que

$$\frac{a_1}{a_2+\sqrt[3]{a_1a_2^2}}+\frac{a_2}{a_3+\sqrt[3]{a_2a_3^2}}+\cdot s+ \\ +\frac{a_n}{a_1+\sqrt[3]{a_na_1^2}}\geq\frac{n}{2}\,.$$

A66. (Proposat per Enric Ventura, UPC) Demostreu que, donat un conjunt $M=\{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$ de r matrius de nombres enters $n\times n$, invertibles o no, sempre n'hi ha una altra, B, que no es pot expressar com a producte de matrius del conjunt M (en qualsevol ordre, de qualsevol longitud, i acceptant repeticions).

A67. (Proposat per la redacció)

Trobeu el lloc geomètric dels centres dels triangles equilàters inscrits a l'el·lipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

A68. (D'una olimpíada brasilera)

Trobeu totes les solucions enteres i positives de l'equació

$$(m+1)^n-1=m!$$