Les fórmules per a les a es poden incloure totes dintre d'un mateix esquema. Si

$$T(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right],$$

llavors,

$$\begin{aligned} a_2(x) &= a_1(T(x)), \\ a_3(x) &= a_2(T(x)) = a_1(T^2(x)), \text{ etc.} \end{aligned}$$

$T(\cdot)$ no és més que una transformació de I en si mateix i això fa pensar en la possibilitat d'aplicar el teorema ergòdic. Cal, però, trobar la mesura invariant. Això, que no és gens fàcil, ho va fer Gauss, que va conjecturar que aquesta mesura era

$$\rho(x) = \frac{1}{\log 2}\,\frac{1}{1+x}.$$

La comprovació de l'ergodicitat de T no és trivial (i Kac no la fa), però, si l'acceptem, l'aplicació del teorema ergòdic a T porta a resultats força sorprenents. Concretament, si prenem la funció $f(x) = a_1(x)$, el teorema ergòdic ens diu que per a gairebé tot $x \in I$,

$$\lim_{n\to\infty} (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} = C,$$

on C és una constant que es coneix com a constant de Khintchine (aquest matemàtic rus va ser el primer a trobar-la el 1935 amb mètodes totalment diferents). Observem que el resultat és força sorprenent perquè ens diu que, per a gairebé qualsevol nombre real de l'interval unitari, els «dígits» del seu desenvolupament en fracció continuada regular tenen, asimptòticament, la mateixa mitjana geomètrica! (Els lectors interessats poden consultar el llibre de la mateixa col·lecció, *Ergodic Theory of Numbers*, K. Dajani i C. Kraaikamp, The Carus Mathematical Monographs, núm. 29, MAA, 2002.)

Finalment, un comentari sobre els problemes. A gairebé totes les seccions del llibre hi ha les referències més rellevants i un petit grup de problemes que estenen els resultats presentats. En alguns casos portant a nous terrenys d'exploració. Com Kac mateix diu, «[...] també he inclòs uns quants problemes. Aquests problemes són, en general, difícils i el lector no s'hauria de desanimar si no els resol sense un esforç considerable.»

Pelegrí Viader
UPF

Racó biogràfic

Bernhard Riemann (1826-1866)

Bernhard Riemann va néixer el 17 de setembre de 1826 a Breselenz, un poble situat al nord d'Alemanya. De petit no va anar a l'escola, però el seu pare, que era pastor luterà, va fer-li de mestre. El 1840, per als estudis de secundària, anà primer a l'Institut de Hannover i dos anys després al de Lüneburg. L'any 1846, seguint el desig del seu pare, va matricular-se a la Universitat de Göttingen com a estudiant de filologia i teologia, però un any després va obtenir el permís patern per estudiar matemàtiques; aquest interès cap a les matemàtiques li provenia de l'època de secundària, quan el director de l'institut de Lüneberg li havia deixat llibres d'Euclides, Arquimedes, Descartes, Newton i Legendre. En particular, va llegir el tractat sobre teoria de nombres de Legendre en només sis dies.

Bernhard Riemann.

El 1847 va traslladar-se a Berlín, on rebé les lliçons de Dirichlet sobre anàlisi i teoria de nombres, les de Jacobi sobre mecànica i àlgebra, i amb Eisenstein estudià les funcions el·líptiques.

Acabats els estudis a Berlín, va tornar a Göttingen per entrar com a ajudant al laboratori de física que dirigia Wilhelm Weber, i és en aquest període quan començà el seu interès per la física; d'altra banda, en aquests mateixos anys, va llegir el filòsof Johann Herbart, el qual l'influencià notablement, sobretot en tot allò relacionat amb la nova manera en què concebé l'espai.

L'anàlisi complexa és un dels camps més destacats de la producció científica de Riemann. El novembre de 1851 defensà la tesi doctoral titulada «Fonaments per a una teoria general de funcions d'una variable complexa». En aquest treball introduí mètodes topològics i per a l'anàlisi de les funcions multivalorades, les superfícies que avui porten el seu nom. L'altra fita fonamental en el camp complex fou la publicació sis anys més tard al *Journal de Crelle* de la «Teoria de funcions abelianes».

El desembre de 1853, en el procés de la seva habilitació com a *privatdozent* a Göttingen, en una de les memòries presentades «Sobre la representació d'una funció per sèries trigonomètriques» introduí allò que avui anomenem la «integral de Riemann», i en una altra de les memòries presentades «Sobre les hipòtesis en què es fonamenta la geometria» introduí i analitzà el concepte de varietat n-dimensional i les relacions mètriques de les quals és susceptible.

El 1855, l'any en què mor Gauss, la Universitat de Göttingen havia creat una càtedra a la qual va accedir Dirichlet, qui havia estat gran mestre de Riemann. I a Dirichlet el succeí Riemann, el 1859.

A la tardor de 1858, en una visita a Göttingen dels matemàtics italians Brioschi, Betti i Casorati, Riemann coneix i inicia una llarga amistat amb Enrico Betti. L'altre gran amic de Riemann fou el matemàtic Richard Dedekind, amb qui solia mantenir llargues converses.

L'any 1859 Riemann fou nomenat membre de l'Acadèmia de Göttingen i membre corresponent de la de Berlín. És per aquest motiu que viatjà a aquesta ciutat, on visità Weierstrass, Kummer i Kronecker. Com a treball per a l'entrada a l'acadèmia presentà «Sobre el nombre de nombres primers inferiors a un nombre donat», que és on es troba enunciada la seva conjectura sobre la localització dels zeros no trivials de la *funció zeta*, conjectura que fins al dia d'avui (14 d'abril de 2008) encara resta oberta.

Riemann, que fou un matemàtic de brillant imaginació i els treballs del qual obririen molts dels camins que conduïren cap a la matemàtica del segle XX, era una persona de caràcter reservat i amb una salut molt debilitada. Quan tenia trenta-sis anys, el 1862, va casar-se amb Elise Koch, que era una amiga de les seves germanes. L'infortuni va fer que, tot just dos mesos després, Riemann sofrís una pleuresia que l'afectà greument. A partir de llavors començà una nova vida donant menys classes i passant llargues temporades a Itàlia, pel seu clima més benigne.

Làpida de B. Riemann al cementiri de Selasca.

El 1863 va anar a Pisa per trobar-se amb Betti, Beltrami, Briochi i Casaroti i aquest mateix any nasqué Ida, la seva única filla. En un tercer viatge a Itàlia s'establí a Selasca, un bell llogaret al costat de la ciutat de Verbania que es troba vorejant el llac Maggiore, i fou en aquest indret on, quan li faltaven dos mesos per complir quaranta anys, afectat d'una tuberculosi, morí. Era el 20 de juliol de 1866. Riemann fou enterrat al cementiri de Selasca, però una remodelació d'aquest va fer que desaparegués la seva tomba i avui el que hi ha és una làpida que es troba penjada a la paret dreta segons s'entra al petit cementiri, com es pot apreciar a la fotografia adjunta.

Per a una biografia de Riemann i la seva obra, hi ha dos llibres excel·lents: el de M. Monastyrsky: *Riemann, Topology and Physics*, (Birkhäuser, segona edició 1999) i el de Detlef Laugwitz: *Bernhard Riemann 1826–1866: Turning Points in the Conception of Mathematics*, (Birkhäuser, 1999).

Eduard Recasens
UPC