risc de desaparició—, que ens hem d'alegrar per aquesta obra que té totes aquestes virtuts i en un nivell molt alt, realment envejable.

La lectura de l'excel·lent, acurada, rigorosa, i molt treballada introducció —més de dues-centes pàgines— ens situa en la matemàtica alemanya de 1850 a 1950 i, justifica ja, per si sola, aquest estat d'alegria de l'esperit. Però, ultra això, l'obra ens ofereix una traducció d'una gran qualitat, feta a partir dels originals alemanys, de deu articles que, en molts casos, no es troben traduïts en cap de les llengues més corrents com són l'anglès, el francès, l'italià o el castellà.

En definitiva, en una primera aproximació al text, podem congratular-nos de l'obra —editada en l'acurada presentació amb què se'ns oferí, ja fa un grapat d'anys, la traducció al català que féu Griselda Pascual, sempre viva en el nostre record, del *Disquisitiones Arithmeticæ* (1996). Feta una lectura més acurada caldrà, com deia, un text de reflexió més tranquil, més pregon i més tècnic.

Però, fins aleshores, ¡quina satisfacció poder llegir "en el parlar dels pares, que és el més dolç per qui el sap confegir" el text que conté la conjectura més important des de fa més de cent-cinquanta anys, o descobrir autors com Sprague o Richert per a molts de nosaltres totalment desconeguts!

En definitiva, doncs, al·leluia, eureka i *sum-sum corda*.

Josep Pla i Carrera
Professor emèrit de la Universitat de Barcelona

Racó biogràfic

CANTOR: El senyor dels àlefs

Sant Petersburg 1845, Halle 1918

Georg Cantor va estudiar matemàtiques a la Universitat de Berlín i es va doctorar en aquesta mateixa universitat amb una tesi sobre teoria de nombres. Un any després s'incorporava com a *Privatdozent* a la Universitat de Halle. En aquesta petita universitat va treballar amb Eduard Heine qui, en aquella època, estava ocupat en la representació de funcions per sèries trigonomètriques, i va convidar Cantor a participar en la seva recerca. Cantor tenia la mirada posada a Berlín, però Berlín quedava lluny, tant pel que feia a la distància com pel que feia a les possibilitats de poder formar part de l'equip de professors, fet que va fer que considerés que, de moment, era millor col·laborar amb Heine. Va començar la seva recerca buscant condicions que asseguressin la unicitat de la representació d'una funció per sèries trigonomètriques i un primer resultat li va assegurar la unicitat de la representació per a aquelles funcions que eren contínues en tots els punts d'un interval. Llavors, Cantor va indagar què passava si la funció era discontínua en algun punt de l'interval i va trobar que seguia havent-hi unicitat en els punts de continuïtat si la funció deixava de ser contínua en un nombre finit de punts. Tot seguit va entrar a considerar la possibilitat de trobar un conjunt més gran que finit de punts de discontinuïtat que no alteressin la unicitat de la representació, però "més gran que finit" volia dir infinit, i de l'infinit se'n sabia molt poc; d'altra banda, en aquell temps encara no s'havia creat un llenguatge matemàtic adequat per poder treballar amb precisió els punts del continu lineal (és a dir, encara no hi havia establerta una topologia de la recta real). En la seva recerca, Cantor va emprar de manera sistemàtica el llenguatge de conjunts, un llenguatge que també utilitzaven Richard Dedekind, Paul du Bois-Reymond i Ulisse Dini, entre d'altres. Per tal de poder estudiar els subconjunts infinits de punts de la recta real, Cantor començà fent una construcció rigorosa dels nombres reals i ho va fer utilitzant "successions fonamentals" de nombres racionals (1871). Després va demostrar la completesa dels nombres reals i va precisar allò que s'havia d'entendre per *recta real*, identificant els punts amb els nombres reals. A continuació va definir "punt límit d'un conjunt de punts" (avui diem *punt d'acumulació*) i, per tot conjunt A de punts de la recta real, va definir el derivat d'A, simbolitzat A', com el conjunt de punts límits d'A. Considerant llavors A'', el derivat del derivat,

i així mateix A''' etc., resultava una cadena monòtona descendent de conjunts derivats en el sentit que, A' conté A'', A'' conté A''', etc. Si en algun moment aquesta cadena descendent donava un conjunt finit, Cantor anomenava *conjunt de primera espècie* al conjunt inicial A. Si cap dels derivats era finit deia Cantor que A era un *conjunt de segona espècie*.

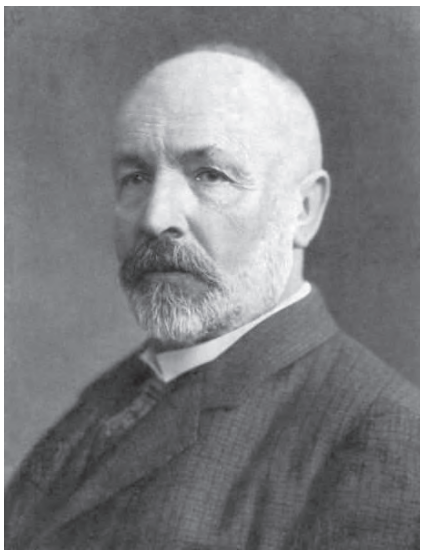
Amb el concepte de conjunt derivat va poder demostrar (1872) que per a totes aquelles funcions el conjunt de discontinuïtats de les quals era de primera espècie també valia la unicitat de la representació en sèrie trigonomètrica. Cantor, tot i que estava satisfet amb el resultat que havia obtingut, va deixar la recerca en la representació de funcions per endinsar-se en l'estudi dels subconjunts infinits de punts de la recta real: de quina manera estaven col·locats?, podien ser comparats entre ells per la seva quantitat de punts? Aquesta última pregunta no tenia cap resposta en aquells moments, ja que fins llavors ningú s'havia ocupat a "comptar" quants elements tenia un conjunt infinit. De fet, per a alguns no era possible comptar els elements d'una infinitat ja que aquesta era inabastable. Cantor va decidir que ell ho faria, que ell era (pensava Cantor) l'home destinat a portar a cap aquesta tasca. Es tractava d'indagar si era possible poder establir un sistema de nombres que permetessin "comptar" els elements dels conjunts infinits. I Cantor va donar resposta a aquesta qüestió construint un sistema de "nombres cardinals transfinits", el primer dels quals va anomenar $\aleph_0$. Dir d'un conjunt A que té $\aleph_0$ elements vol dir que té tants elements com nombres naturals $\mathbb{N}$, i això significa que hi ha una bijecció entre A i $\mathbb{N}$.

$\aleph_0$ és doncs el cardinal assignat als conjunts numerables, i després segueixen els altres $\aleph$'s, $\aleph_1$, $\aleph_2$, etc. Cantor va construir també els nombres ordinals transfinits, però aquests, a diferència dels ordinals dels conjunts finits, són molt més subtils.

A l'època de Cantor se sabia que hi havia una infinitat de nombres primers, una infinitat de nombres racionals, una infinitat de nombres irracionals, etc., però es podien comptar uns i altres? tenia algun sentit preguntar-se quina quantitat hi havia de cada classe? L'infinit era un sac on s'hi posava tot allò que no era finit i pràcticament ningú (Bolzano i Dedekind n'eren l'excepció) s'havia preocupat de mirar dins del sac. En dir d'una col·lecció d'objectes que era infinita es volia dir que no era finita en el sentit que si algú iniciava un recompte dels objectes i en algun moment pensava que ja els havia comptat tots s'equivocava ja que sempre en quedava algun fora del recompte. Pel que fa a l'aritmètica, la idea d'infinit era aquesta del recompte inesgotable i, en el cas de la geometria, era quelcom semblant, així per Euclides (i tots els altres geòmetres) una recta era allò que nosaltres anomenem un *segment rectilini* però amb l'important afegit que aquesta "recta grega" es podia allargar "en rectitud" tant com es volgués, això sí, després de cadascun dels allargaments, la "recta grega" era un segment rectilini amb un punt inicial i un punt final. Comptat i debatut, és clar (o potser no?) que l'experiència humana és de "finituds" (en nombre o extensió), finituds que poden ampliar-se a finituds més grans tant com es vulgui, d'una manera efectiva o amb la imaginació, però, sempre "finituds". Aristòtil deia que aquest infinit era "l'infinit potencial", perquè segons ell hi havia un altre tipus d'infinit, "l'infinit actual", aquell que era present en la seva totalitat. Aquest infinit, però, no formava part dels atributs humans: aquest infinit estava reservat als déus, i, en la civilització cristiana només Déu podia tenir aquest atribut de la infinitud completa i intemporal. Cantor, no obstant això, va crear els nombres transfinits i va obrir una porta que permetia al ser humà traspassar tots els nombres naturals. La teoria de conjunts de Cantor i el seu tractament de l'infinit va sorprendre i revolucionar la comunitat matemàtica, alguns membres de la qual la van rebre amb entusiasme (Karl Weierstrass, Adolf Hurwitz, David Hilbert, etc.). Hilbert va arribar a dir "Cantor ha creat un paradís del qual ningú ens podrà fer fora". Altres, després de ser descobertes certes paradoxes, van contribuir-hi amb les seves recerques (Gottlob Frege, Bertrand Russell, Ernst Zermelo, etc.) i d'altres com Poincaré no hi simpatitzaven massa. Henri Poincaré va dir que algun dia els matemàtics es curarien d'aquella epidèmia conjuntista i alguns, com Kronecker, la menyspreaven i la van ridiculitzar tant com van poder. També hi va haver crítiques per part de filòsofs i teòlegs.

Amb el temps, la majoria dels matemàtics va incorporar el llenguatge de la teoria de conjunts de Cantor en el seu bagatge i aquest es va estendre de tal manera que va acabar sent el llenguatge propi de la matemàtica acadèmica i escolar al llarg del segle XX. Avui dia, els nous recursos informàtics i moltes àrees noves de recerca han canviat força l'estil matemàtic del segle XX, tot i que la teoria de conjunts continua

sent útil en certes parts essencials de la matemàtica.



George Cantor, nascut el 3 de març de 1845, va ser el primer dels sis fills del matrimoni format per George Woldemar Cantor i Maria Anna Böhm. Els pares de Cantor tenien orígens diferents, els avis paterns pertanyien a la comunitat jueva portuguesa establerta a Copenhaguen (Dinamarca), ciutat on nasqué el pare de Cantor qui, de petit, es va traslladar a viure a Sant Petersburg (Rússia) amb la seva mare. En aquesta ciutat la mare va decidir que fos educat en el si de l'església luterana evangèlica. Els avis materns de George Cantor vivien a Sant Petersburg, eren catòlics i procedien d'una família austríaca, entre els membres de la qual hi figuraven músics virtuosos. La mare de Cantor, Maria Anna Böhm, una persona culta i amant de l'art, va estudiar cant i tocava el piano. George Cantor heretaria de la seva mare l'amor a l'art i la música i, del seu pare, un sentit del deure i una consciència religiosa que el feia avançar irremeiablement cap a acomplir la missió que ell tenia en aquest món, missió que li seria revelada a Halle: el coneixement i transmissió dels nombres transfinits.

Woldemar Cantor es va dedicar primer al comerç i després a ser corredor de borsa. Amb el temps va acumular fortuna però, després de patir una tuberculosi, els metges li van aconsellar que anés a viure a un lloc de clima més benigne i, va decidir anar-se'n a viure al sud d'Alemanya. Així doncs, l'any 1856, el jove Cantor d'onze anys va deixar Rússia per anar a viure primer a Wiesbaden i després a Frankfurt del Main. A Wiesbaden va fer uns bons estudis secundaris, destacant sobretot en matemàtiques. A causa d'això, el pare va pensar que el seu fill podria ser un bon enginyer i així tindria un bon futur. Seguint la decisió paterna, el 1862, Cantor va entrar al Politècnic de Zuric per estudiar Enginyeria, però ell volia fer Matemàtiques. El seu pare li ho havia denegat una i altra vegada, però així i tot, ja iniciats els estudis d'Enginyeria, Cantor va tornar a insistir enviant-li respectuoses cartes en què manifestava el seu fervor per les matemàtiques. Finalment, el pare va cedir i Cantor va passar ràpidament de l'enginyeria a les matemàtiques. El juny de 1863 moria el seu pare i hom pensa que, potser davant d'una mort esperada, Woldemar Cantor va saber entendre com calia la demanda del seu fill.

Després de la mort del pare, Cantor i la seva mare van anar a viure a Berlín i així Cantor va poder seguir els seus estudis a la universitat que en aquells moments tenia més prestigi pel que feia a les matemàtiques pures. En aquell lloc impartien classes Karl Weierstrass, Ernst Kummer i Leopold Kronecker. Cantor va ser company d'estudis de Hermann Schwarz, i tots dos iniciarien una llarga amistat que es va estroncar de cop quan Cantor va començar a publicar els seus resultats sobre els nombres transfinits. Durant la seva estada a Berlín va tenir molt bona relació amb Kummer i Kronecker. Com ells, Cantor es va decantar cap a la teoria de nombres i, tant la seva tesi (1867) com posteriorment l'habilitació van tractar sobre aquest camp.

Inicià la vida laboral donant classes en una escola femenina de Berlín. Aquesta feina, però, va durar ben poc ja que el 1869 Cantor era admès com a *Privatdozent* a la Universitat de Halle, una petita universitat d'una petita ciutat del centre oriental d'Alemanya, distant uns quaranta quilòmetres de Leipzig. La idea inicial de Cantor era que aquesta petita universitat fos només un primer pas cap a una càtedra a la Universitat de Berlín, però això no va passar mai, tot i els diferents intents que ell va fer per poder entrar-hi. Cantor acabaria essent catedràtic de la Universitat de Halle (1879) i en aquesta universitat passaria la resta de la seva vida acadèmica.

Com ja he dit a la introducció, a la Universitat de Halle, Cantor hi va trobar el matemàtic Eduard Heine, l'oferta del qual de treballar junts no tan sols va canviar-li l'orientació que portava de Berlín sinó que l'abocaria cap a l'estudi dels conjunts infinits de manera exclusiva. L'estiu de 1872 va ser un estiu important per Cantor, ja que en unes vacances a Suïssa va fer amistat amb Richard Dedekind. Tots dos

estaven interessats en el tema dels conjunts infinits i, a partir de llavors, ja sigui en trobades, ja sigui per correspondència, iniciarien un sostingut i profund intercanvi d'idees sobre nombres i conjunts infinits.

El 1873 Cantor obtingué un gran resultat sobre nombres reals, un resultat que, en part, li contestava aquella pregunta de quants nombres reals hi havia. Cantor ja havia demostrat que hi havia tants nombres racionals com nombres naturals i també ja havia demostrat que eren numerables els enters algebraics, però llavors la sorpresa va ser veure que no podia establir-se cap correspondència bijectiva entre el nombres reals i els nombres naturals. En algun sentit es podia dir que hi havia més reals que racionals, la pregunta era: quants més? Començava l'aventura transfinita de Cantor.

Una primera conseqüència d'aquest resultat va ser prou curiosa. L'any 1844 Joseph Liouville havia provat que existien infinits nombres reals transcendents donant-ne una certa família; el 1873, Charles Hermite va demostrar que el nombre irracional e també era transcendent, però no se'n coneixien massa més, hom pensava que els nombres transcendents eren més aviat escassos en la recta real. Però llavors, amb el resultat de Cantor, es deduïa que hi havia d'haver més nombres transcendents que nombres algebraics. Resultava doncs que els reals més abundosos eren precisament els transcendents i que els rars eren tots els altres!

En aquesta època de bons resultats Cantor va conèixer Vally Guttman, una amiga de la seva germana amb grans inquietuds artístiques, molt activa i que, a més, sabia tocar el piano. Cantor en va quedar enamorat (cal recordar que la mare de Cantor responia a un perfil semblant) i s'hi va casar l'agost del 1874. El matrimoni va tenir sis fills. Pel viatge de noces anaren a la bonica petita ciutat suïssa d'Interlaken i, ves per on, en aquest indret va tornar a trobar per casualitat el seu amic Dedekind. En aquest bell paratge envoltat de llacs i muntanyes es van preguntar si era possible establir una correspondència bijectiva entre els punts d'un quadrat (figura bidimensional) i els punts d'un dels seus costats (figura unidimensional). Al cap d'uns tres anys, el juny de 1877, Cantor escrivia a Dedekind per dir-li que ja havia trobat una correspondència bijectiva entre els punts d'un quadrat i un dels seus costats, i, tot i que la funció bijectiva que havia trobat no era contínua, Cantor afegia l'exclamació, "ho veig i no puc creure-ho". Veritablement aquest era un resultat sorprenent que va tenir importants derivacions en l'estudi del concepte de dimensió. Aquell mateix any Cantor va voler publicar un article sobre això al *Journal de Crelle*, però Kronecker va posar-hi impediments, que no es van poder salvar fins que Dedekind va intervenir a favor de Cantor. Llavors l'article es va publicar l'any següent, el 1878, però Cantor, molest amb els editors de la revista i especialment amb Kronecker, va dir que no hi publicaria mai més. Els sis importants articles següents en què apareix la teoria dels nombres transfinits (període 1879-1884) els va publicar a la revista que editava Felix Klein, els *Mathematische Annalen*.

L'any 1879 va ser l'any que aconseguí una càtedra a la Universitat de Halle. A partir de llavors es va iniciar un llarg període en què, juntament amb els bons resultats que anava assolint, va haver d'aguantar les dures crítiques de Kronecker i que, a més a més, el seu amic de l'època berlinesa, H. Schwarz, de sobte interrompés la correspondència que fins llavors havien mantingut.

El 1881, el seu company i protector E. Heine moria. Cantor, llavors, va pensar que Dedekind podria ocupar la càtedra deixada per Heine i així ho va proposar a les autoritats corresponents, que hi van estar d'acord. Però va ser el mateix Dedekind, per gran disgust de Cantor, qui no va acceptar l'oferiment; aquest fet va portar com a conseqüència un refredament temporal de la seva amistat. Per aquella època va rebre una carta del matemàtic suec Gösta Mittag-Leffler oferint-li de publicar a la revista *Acta Mathematica*, de la qual era editor, i que feia poc havia creat. Entre ells es va iniciar una bona relació que es va refredar quan, al cap de tres anys, Mittag-Lefler li va parar la publicació d'un article sobre "tipus d'ordre" argumentant que era cent anys avançat al seu temps. Cantor, molt molest, li va contestar que ell no podia esperar fins l'any 1984 per donar a conèixer els seus resultats i a partir d'aquest fet Cantor va deixar de publicar a *Acta Mathematica*.

En el camp de la recerca, Cantor estava enormement capficat a trobar una demostració d'allò que ell enunciava com una hipòtesi, a saber, que entre el cardinal dels naturals ($\aleph_0$) i el cardinal dels reals (el continu) no ni havia cap altre cardinal transfinit (hipòtesi del continu). És a dir, que un subconjunt de nombres reals que no fos finit ni numerable havia de ser equipotent als reals. Per a resoldre aquest enigma va introduir la noció de "conjunt

perfecte" com aquell conjunt que coincidia amb el seu derivat ($A = A'$); un conjunt perfecte era doncs un conjunt tancat i dens en si. Cantor havia demostrat que si un conjunt era perfecte havia de tenir la mateixa cardinalitat que els reals i ara es proposava demostrar que tot subconjunt infinit de reals que no fos numerable havia de contenir necessàriament un conjunt perfecte. Amb això últim quedaria provada la hipòtesi del continu, però, malauradament per Cantor, no era cert, com més tard va demostrar Felix Bernstein, un antic alumne seu. Així doncs, Cantor estava seguint un camí equivocat per trobar una demostració de la hipòtesi del continu, una delicada hipòtesi lligada a l'axiomàtica de la teoria de conjunts de la qual es partia. I Cantor estava ben lluny de pensar una cosa d'aquesta mena. En el Congrés Internacional de Matemàtics celebrat a París l'any 1900, David Hilbert proposava com a primer problema (dels vint-i-tres proposats) a resoldre per al segle XX la demostració de la hipòtesi del continu, i el 1963 Paul Cohen provaria que la hipòtesi del continu no podia ser demostrada ni afirmativament ni negativament dins el sistema axiomàtic Zermelo-Fraenkel de la teoria de conjunts.

L'any 1883 Cantor va decidir que el cinquè dels sis articles publicats a *Matematischen Annalen*, l'article en què hi havia desenvolupada la teoria dels nombres transfinits, mereixia una publicació a part. El resultat va ser un llibret editat a Leipzig per Teubner que portava per títol *Fonaments per a una teoria general de conjunts. Una investigació matemàtico-filosòfica sobre la teoria de l'infinit.* (Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre. Ein Mathematish-Philosophischer Versuch in der Lehre des unendlichen). En aquest petit llibret, a més de la teoria dels nombres transfinits, amb la seva aritmètica construïda a partir del concepte de conjunt ben ordenat, hi ha un munt de consideracions filosòfiques que ajuden a comprendre millor allò que Cantor tenia en ment quan parlava de l'infinit.

El 1884 Cantor va viatjar a París per explicar els nombres transfinits i la seva aplicació a l'anàlisi funcional als matemàtics francesos. Entre ells hi havia C. Hermite, E. Picard i H. Poincaré. Cantor quedà molt satisfet d'aquesta trobada, en especial de les seves converses amb Poincaré. De tornada a Halle, de sobte va sentir un gran malestar que se li va manifestar amb ofuscació mental i que va acabar en una forta depressió. Cantor tenia llavors trenta-nou anys i aquesta seria la primera manifestació d'una greu malaltia mental que s'aniria repetint amb més o menys virulència amb el pas del temps. Fins i tot, en diverses ocasions, va haver de ser internat en un sanatori.

Després d'aquest primer revés en la seva salut, tant ell com la seva família es van sentir fortament trasbalsats. Cantor va pensar que havia d'alleugerir la seva dedicació a la recerca matemàtica i dedicar part del seu temps a altres activitats. En alguna carta manifesta els seus dubtes pel fet d'haver pres de jove la decisió de fer matemàtiques en comptes de dedicar-se a les arts i la música. D'altra banda, estava decebut d'aquella societat matemàtica alemanya que no li feia cas i que ell creia que no el retribuïa com ell es mereixia, i, sobretot, ja no podia aguantar més l'actitud contrariada de Kronecker. En aquest sentit, li va escriure una carta en què li manifestava aquest sentiment i li demanava una reconciliació a la qual Kronecker va accedir tan bon punt es va assabentar del seu greu estat.

En aquesta nova situació, Cantor, el 20 d'octubre de 1884, va escriure una carta a Mittag-Leffler en què li expressava el seu desig de deixar les matemàtiques i dedicar-se a la filosofia. En aquesta mateixa línia havia demanat al seu rector que li encarregués fer classes de filosofia. El maig del 1885 Mittag-Leffler va rebre una carta de S. Kovaleskaia en la qual li comunicava que Cantor estava impartint classes de filosofia a Halle, i el juny del 1894 Cantor escrivia a Hermite explicant-li que l'estudi de la metafísica i la teologia ocupaven la major part del seu temps. En aquests anys també va iniciar una extensa correspondència amb filòsofs i teòlegs per defensar la seva teoria dels transfinits en el sentit que, més enllà de la matemàtica, aportaria una millor comprensió del món, ja que havia de ser molt útil per a la ciència i especialment per a la física. Cantor sentia que formava part d'un cosmos ben ordenat pel Déu etern, l'obra del qual hom podia descobrir amb l'estudi i la recerca. Els seus filòsofs preferits eren Plató, Leibniz i Spinoza. Ell creia que les coses de la matemàtica existien amb independència del ser humà formant part de l'obra de Déu. En aquest sentit Cantor deia que ell no havia pas creat els nombres transfinits sinó que simplement els havia descobert.

A banda del seu interès per la filosofia i la teologia, també es va interessar per estrafolàries qüestions com ara voler demostrar que les obres de Shakespeare havien estat escrites per Francis

Bacon, o bé que Josep d'Arimatea era el pare de Jesús. En un altre ordre de coses, va decidir participar en el projecte de formar una societat de matemàtics alemanys que fos independent de la de ciències en general, un projecte que havia encetat Alfred Clebsch el 1867 però que va parar-se el 1872 a causa de la seva sobtada mort. Klein el va voler continuar però no se'n va sortir i, finalment Cantor se'n va fer càrrec i el 1890 es fundava la Unió Matemàtica Alemanya, la Deutsche Mathematiker-Vereinigung (DMV). L'any 1891 es va celebrar la primera trobada de la DMV i Cantor va ser-ne elegit president. En aquesta ocasió, Cantor havia convidat Kronecker, que va acceptar però, malauradament, no va poder assistir-hi per la mort sobtada de la seva esposa. En aquesta reunió Cantor va presentar el seu "mètode diagonal" per donar una demostració de la no numerabilitat dels nombres reals. Aquest era un mètode més fàcil i potent que no pas el que havia fet servir en la seva primera demostració del 1874, gràcies al qual també va provar que el conjunt P(A) de les parts d'un conjunt A era de potència cardinal estrictament superior al conjunt donat A. D'aquesta manera també quedava provada l'existència d'una successió estrictament creixent de cardinals transfinits, els $\aleph$. Tota aquesta presentació de Cantor figura en un article del primer volum del *Jahresbericht* (informe anual) de la DMV.

Cantor es va engrescar amb aquest projecte perquè ell volia un espai de llibertat on els matemàtics poguessin presentar lliurement les seves idees i treballs sense cap més restricció que la derivada de la crítica rigorosa dels membres de l'associació, i no pas haver de passar necessàriament pel sedàs de certes figures consagrades que, des de les universitats de Berlín i Göttingen, dirigien la matemàtica alemanya i de la qual hom podia quedar-ne marginat com a figura de segona o tercera categoria si no seguia les seves indicacions. D'aquí el famós aforisme de Cantor "L'essència de les matemàtiques és la seva llibertat", tot i que afegia, basant-se en la seva pròpia experiència, que la llibertat sovint es pagava amb l'aïllament i la discriminació.

Animat per l'èxit obtingut amb la DMV, Cantor va pensar en l'organització de congressos internacionals i d'aquesta manera va intervenir en l'organització dels dos primers congressos internacionals de matemàtics, el de 1897 a Zuric i el de 1900 a París. En aquests congressos el tema de la teoria de conjunts va ser un tema estrella, i Cantor finalment va poder ser testimoni de l' interès que el tema suscitava entre els matemàtics de primera línia.

En aquest bon període Cantor decidí publicar de nou sobre conjunts i ho va fer amb un llarg article que anomenà "Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre" ("contribucions a la fonamentació de la teoria dels conjunts transfinits"), l'article va ser publicat en dues parts als *Mathematische Annalen*, la primera el 1895, però la segona part no es va publicar fins dos anys després, a causa segurament del fet que Cantor creia que estava a punt de trobar una demostració de la seva hipòtesi del continu; aquesta, però, no acabava d'arribar. La idea inicial de Cantor per a aquests articles era oferir una exposició completa de la seva teoria de conjunts; però això no va ser possible, ja que la teoria d'ordinals i la bona ordenació li van presentar subtileses que ell no esperava. I, d'altra banda, l'aparició, per aquells temps, de certes paradoxes sorgides de l'ús del seu propi llenguatge de conjunts, el feien sentir insegur, tot i que en el seu interior estava convençut que l'obra de Déu no podia ser paradoxal i que per tant amb el temps ja es trobaria la solució. Va ser el mateix Cantor qui va descobrir una primera paradoxa en la seva teoria de conjunts i ell mateix va escriure a Hilbert (1896) explicant-li el fet. De manera independent, el matemàtic italià Burali-Forti també n'havia trobat una, que va donar a conèixer en una publicació del 1897.

Cantor va anunciar que hi hauria una tercera entrega on tractaria tots aquests temes que havia deixat pendents. Però aquesta tercera entrega no va arribar mai. L'any 1899, poc després de la mort sobtada del seu fill Rudolf, Cantor va tornar a caure en un estat de confusió mental. Era el segon atac mental que sofria, i a partir de llavors la freqüència dels atacs aniria en augment. Va haver de suprimir cursos sencers però, amb tot, ell seguia actiu en allò que podia. El 1903 va impartir una conferència sobre les paradoxes de la teoria de conjunts i, el 1904 va assistir al Congrés Internacional de Matemàtics que es va celebrar a Heidelberg. El 1905 la Universitat de Halle el va declarar professor emèrit, la qual cosa l'alliberava de moltes obligacions acadèmiques, i el 1911 va viatjar a Escòcia invitat per la Universitat de St. Andrews per assistir a la celebració del cinc-cents aniversari de la fundació d'aquesta universitat. Cantor va voler aprofitar aquest viatge per a anar a Londres a visitar B. Russell, que acaba de publicar els *Principia Mathematica*, però

això no va ser possible ja que va haver de tornar urgentment a Alemanya per causa d'una greu malaltia d'un dels seus fills. El 1912 tornarà a St. Andrews ja que aquesta universitat l'anomenà doctor *honoris causa*.

Cantor es retirà definitivament de la vida pública el 1913 (seixanta-vuit anys) i a partir de llavors es va recloure a casa seva en una habitació repleta de llibres, la qual només deixava per fer alguna passejada o bé per anar a fer cures de salut en algun sanatori.

El 28 de juliol de 1914 esclatà la Gran Guerra i amb ella van començar temps difícils. El 1915 els matemàtics de Göttingen, liderats per Hilbert, organitzaren una visita a la casa de Cantor per celebrar el seu setantè aniversari i li regalaren un bust de marbre que avui es troba a la Universitat de Halle. El juny del 1917 Cantor entrà de nou al sanatori i aquesta vegada ja no en va poder sortir. El 6 de gener del 1918 moria d'un atac de cor, el novembre d'aquell mateix any acabava la Primera Guerra Mundial.

Hilbert, poc després de la mort de Cantor, enviaria una carta a la seva filla Else on li deia que havia mostrat a Einstein, en una visita que aquest havia fet a Berlín, "el mètode diagonal" que Cantor havia fet servir per demostrar la no numerabilitat dels reals i que Einstein, impressionat per la bellesa d'aquell mètode demostratiu tan simple i potent a la vegada, havia mostrat una gran admiració pel seu pare.

Per a escriure aquest racó biogràfic sobre Cantor m'he basat principalment en dos llibres: El primer és *George Cantor His Mathematics and Philosophy of the Infinite* de Joseph Warren Dauben, editat per Harvard University Press l'any 1979. Al llarg del llibre Dauben explica l'obra de Cantor sense oblidar mai la seva contextualització històrica. És especialment recomanable el capítol 12, en què entra a estudiar la personalitat de Cantor. El segon és un llibre editat per l'editorial Crítica l'any 2006, una traducció al castellà feta per José Ferreirós i Emilio Gómez-Caminero dels *Grundlagen* de Cantor (1883), juntament amb correspondència escollida entre Cantor, Hilbert, Dedekind i alguns altres. El seu títol és *Fundamentos para una teoría general de conjuntos. Escritos y correspondencia selecta*. Aquest llibre té una introducció d'unes setanta pàgines en les quals Ferreirós comenta la vida i obra de Cantor.

Eduard Recasens Gallart
Universitat Politècnica de Catalunya

Webs de matemàtiques

Pi o Tau?

Des de fa uns anys, cap a mitjans de març, es produeix una febre que ens arriba dels Estats Units per celebrar el Dia Pi. Segons la tendència que tenen els nord-americans d'escriure les dates amb el mes davant de l'any, el dia 14 de març, *March 14th,* s'abreuja com 3/14, i algú ha identificat aquesta data amb les tres primeres xifres significatives de l'expressió decimal de pi, ha declarat el 14 de març com Dia Pi, i fins i tot de vegades, per extensió, com el Dia de les Matemàtiques. Si a això li afegim la semblança de la pronunciació de *pi* amb la paraula *pie* (pastís), i que els pastissos als EUA són normalment rodons, ja tenim la celebració assegurada, per no dir rodona.

Ara bé, hi ha un grup de matemàtics que no celebra mai el Dia Pi, sinó que prefereix celebrar cert dia del mes de juny. Aquests matemàtics qüestionen l'elecció de π com a constant fonamental del cercle, i fins i tot com a nombre icònic de les matemàtiques. Històricament, π apareix com la relació entre la longitud d'una circumferència i el seu diàmetre, i observem que el diàmetre d'un objecte és més senzill de mesurar (amb un aparell tipus peu de rei, per exemple) que el radi, que n'és la meitat. Però observem que conforme les matemàtiques han evolucionat, la gran majoria de fórmules matemàtiques relatives al cercle s'expressen en funció del radi, i el diàmetre és pràcticament invisible. Però la constant no s'ha actualitzat, sinó que segueix expressant la longitud dividida pel diàmetre.

El col·lectiu de matemàtics al voltant del *Tau manifesto* publicat al web `www.tauday.com` propugna la substitució de π com a constant matemàtica per $\tau = 2\pi$. Argumenten que a la gran majoria de les fórmules matemàtiques on π