



ACTES DE LA
XXI JORNADA
SOBRE LA HISTÒRIA
DE LA **CIÈNCIA**
I L'ENSENYAMENT

«Antoni Quintana i Marí»

Barcelona, 17 i 18 de novembre de 2023

Edició a cura de:

Carmel FERRAGUD

Maria Rosa MASSA-ESTEVE



IEC
Institut d'Estudis
Catalans



**SOCIETAT
CATALANA
D'HISTÒRIA
DE LA CIÈNCIA
I DE LA TÈCNICA**

ACTES DE LA
XXI JORNADA
SOBRE LA **HISTÒRIA**
DE LA **CIÈNCIA**
I L'ENSENYAMENT

ACTES DE LA
XXI JORNADA
SOBRE LA HISTÒRIA
DE LA **CIÈNCIA**
I L'ENSENYAMENT

«Antoni Quintana i Marí»

Barcelona, 17 i 18 de novembre de 2023

Edició a cura de:

Carmel FERRAGUD

Maria Rosa MASSA-ESTEVE

Societat Catalana d'Història de la Ciència i de la Tècnica
filial de l'Institut d'Estudis Catalans

Barcelona, 2025

Actes de la XXI Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament
«Antoni Quintana i Marí»

Imatge de la coberta: Mostrador sobre malalties bacterianes del Wellcome Museum of Medical Science (març de 1934).

Font: Wellcome Collection. Ref. WT/D/1/20/1/31/41.

Disponible en: <https://wellcomecollection.org/works/xt7mybhs/items>

© dels autors de les ponències

© 2025, Societat Catalana d'Història de la Ciència i de la Tècnica,
filial de l'Institut d'Estudis Catalans, per a aquesta edició
Carrer del Carme, 47. 08001 Barcelona

Primera edició: Octubre de 2025

Editors literaris: Carmel Ferragud i M. Rosa Massa Esteve

Correcció per: Marina Sales Lorenzo

Compost per Albert Llop

ISBN: 978-84-9965-809-4



Aquesta obra és d'ús lliure, però està sotmesa a les condicions de la llicència pública de *Creative Commons*. Es pot reproduir, distribuir i comunicar l'obra sempre que se'n reconegui l'autoria i l'entitat que la publica i no se'n faci un ús comercial ni cap obra derivada. Es pot trobar una còpia completa dels termes d'aquesta llicència a l'adreça: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/es/deed.ca>.

SUMARI

C. FERRAGUD; M. R. MASSA-ESTEVE. <i>Introducció</i>	8
A. MARZOA; S. VALLMITJANA; J. M. HERNÁNDEZ. <i>Física de museu: Ús d'aparells científics històrics per a l'ensenyament de la física. exemples de la col·lecció de la facultat de física de la Universitat de Barcelona</i>	11
J. GARCÍA; J. M. HERNÁNDEZ; E. PÉREZ. <i>Una balança de Coulomb petita a la vitrina</i>	23
E. SÁEZ PALMA; J. M. PONS POBLET. <i>Estudi per a la restauració del molí fariner de La Mola</i>	31
M. BLANCO. <i>Resolució de triangles amb el suport del sector anglès: algunes reflexions sobre la seva implementació a l'aula de Matemàtiques</i>	46
A. VIDAL NOGUEIRA. <i>Naturaleza de la ciencia y colecciones científicas: Una propuesta de taller experimental</i>	56
J. NAVARRO LOIDI. <i>El arenario de Arquímedes</i>	70
I. GEVARA-CASANOVA; F. ROMERO-VALLHONESTA; M.R. MASSA-ESTEVE. <i>Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria, un llibre de text del segle XVI</i>	77
D. VIRGILI CORREAS. <i>Geometria analítica per recosir connexions a Batxillerat</i>	87
P. J. HERRERO PIÑEYRO; A. LINERO BAS; A. MELLADO ROMERO. <i>Ideas históricas y didácticas sobre la cuadratura aritmética de Jacques Ozanam (1640-1718)</i>	98
J. BERENGUER. <i>Sobre la construcció de còniques en el tractat De la Aplicacion del Algebra a la Geometria de Cerdà</i>	112
D. MARTÍNEZ VERDÚ. <i>Aproximación a la enseñanza de las matemáticas en la Real Academia de San Fernando de Madrid en el siglo XVIII</i>	126
M. BRIDGEWATER; E. MENTA OLIVA. <i>Instrument científic, interès filosòfic: La història per ensenyar la lògica</i>	138
E. DORREGO LÓPEZ. <i>Historia y filosofía de la ciencia: Una necesidad y tres vías para implantarla en la educación no universitaria</i>	146
A. CAMÓS. <i>Lamarck: Perquè parlar-ne a l'ensenyament secundari, i com fer-ho</i>	153
N. SOLSONA PAIRÓ. <i>Rosa Sensat i les ciències en la vida de la llar</i>	160

INTRODUCCIÓ

Tal com s'ha esdevingut amb continuïtat bianual, la XXI Jornada d'Història de la Ciència i l'Ensenyament «Antoni Quintani i Marí» es va celebrar a la seu de l'IEC a Barcelona els dies 17 i 18 de novembre de 2023, coordinada pels que subscriuim aquestes línies.

En aquesta ocasió la Jornada estigué dedicada als museus i les col·leccions científiques i la seva utilitat per a l'ensenyament de la ciència, a més de les sessions habituals sobre la història a l'aula tant com a instrument de reflexió, com a eina d'ensenyament de la ciència. Organitzada entorn a cinc sessions, comptà amb la participació de trenta-tres autores i autors i dinou comunicacions, així com una conferència plenària que estigué a càrrec de la professora Marta Lourenço, directora del Museu Nacional de História Natural e da Ciência de Lisboa: *Learning Science at the Museums: purposes, objects, and practices*. Les reflexions que s'han escrit les darreres dècades entorn del valor de l'estudi de la cultura material de la ciència són ingents. Monografies i catàlegs lligats a exposicions i museus no han cessat de publicar-se en molts països i per banda d'autors que a hores d'ara són imprescindibles en els estudis de la història de la ciència, tal com han mostrat Josep Simon i Alfons Zarzoso en un treball de síntesi molt recomanable entorn a la cultura material de la ciència a «Sabers en acció» (<https://sabersenaccio.iec.cat/es/temas/>).

Les reflexions s'amunteguen, cert, però aquesta aposta irrenunciable per la materialitat de la ciència es fa sentir en les aules? Realment acompanya el quefer quotidià dels ensenyants? De col·leccions magnífiques no en manquen a casa nostra, exemples notables custodiats a centres educatius, instituts d'educació secundària i batxillerat i universitats. Però hom té la sensació que encara som lluny d'utilitzar convenientment tot aquest patrimoni, que en moltes ocasions malda per sobreviure, més per l'entestament d'uns pocs convençuts que pel sentir majoritari. La conservació i exhibició adequada vol recursos, humans i pecuniaris, que no sempre els gestors estan disposats a assumir. El present volum, que és una bona mostra del que fou el nostre encontre científic, pretén recollir alguns treballs que volen mostrar esforços concrets per fer possible aquest programa educatiu.

Aquí aportem quinze articles que hem organitzat entorn a tres eixos principals: Instruments científics i el seu valor per a l'ensenyament; Història de les matemàtiques en la docència, i Reflexions i experiències per a l'aula.

El primer eix l'integren cinc treballs que reflexionen sobre instruments concrets i els temes i problemes entorn de la ciència que poden abordar-se amb el seu ús: l'experiència de la Facultat de Física de la Universitat de Barcelona en aprofitar la seva col·lecció per a l'ensenyament de la mateixa física, l'estudi de la història de la ciència i del seu ensenyament (Marzo, Vallmitjana i Hernández); la balança de Coulomb i la difícil reproductibilitat dels experiments (García, Hernández i Pérez); el sector anglès i la seva utilització en matemàtiques per tal de millorar la comprensió de conceptes de trigonometria (Blanco); els molins fariners, el seu funcionament com a instrument d'enginyeria i la necessitat de protegir aquest patrimoni (Sáez i Pons); el sacarímetre i la possibilitat d'aproximar els estudiants als usuaris dels instruments, els seus interessos i els problemes del maneig (el coneixement tàcit) (Vidal).

El segon eix el componen sis treballs que viatgen en la història de les matemàtiques per cercar en alguns treballs pretèrits elements útils a fi que els alumnes aprenguin i s'engresquin. De fet, la història de les matemàtiques transmet una percepció de la matemàtica com una ciència útil, dinàmica, humana, interdisciplinària i heurística, a la vegada que complementa el seu estudi temàtic. Des de fa un temps investigadors de tot el món han impulsat i desenvolupat l'ús de la història de les matemàtiques per comprendre la matemàtica i a la vegada, millorar el seu ensenyament. Així, en el primer treball començant amb un text d'Arquímedes sobre l'infinit, permet introduir a l'aula com es mesurava l'univers a l'antiguitat, tema que sempre ha preocupat la humanitat. A la vegada, aquests càlculs aritmètics mostren als alumnes altres maneres d'aproximar les quantitats (Navarro-Loidi). Prenent com a font un text del segle XVI, les autores resolen problemes geomètrics emprant l'àlgebra, mostrant que la relació entre geometria i àlgebra permet reflexionar als alumnes sobre l'evolució del pensament matemàtic (Romero, Guevara i Massa). El segle XVII i després de René Descartes, l'àlgebra fa un pas més i s'empra per resoldre problemes geomètrics grecs amb les noves eines analítiques (Virgili). A finals del segle XVII, les matemàtiques comencen a solucionar problemes de quadratures amb fórmules algebraïques. En aquest cas l'estudi de la quadratura del cercle a Jacques Ozanam, mostra als alumnes noves i fructíferes eines de càlcul (Herrero, Linero i Mellado). Prenent com a font un text del segle XVIII, es resol i es compara amb altres autors la construcció de les còniques, que ens permet recrear aquestes eines a una classe actual (Berenguer). L'última contribució d'aquest eix es centra en la història de l'ensenyament de la matemàtica a Espanya. Centrada en el segle XVIII i en les propostes d'obres per a l'ensenyament de la matemàtica de Benito Bails ens mostra els continguts que s'impartien (Martínez).

L'últim eix el configuren quatre treballs que reflexionen sobre l'ús de determinats aspectes de la història de la ciència i com manejar-los per fer més

comprensibles assumptes d'interès present. Així, a partir de les complexitats trobades en les aules universitàries es fa una reflexió sobre com utilitzar la història de la lògica per poder apropar i fer més assequible i menys esquerpa aquesta matèria als estudiants de filosofia (Menta i Bridgewater). Enfront de les absències en el currículum de l'educació secundària i aprofitant que dona les possibilitats de la llei educativa a Galícia, hom planteja com introduir la història i la filosofia de la ciència (Dorrego). Altre treball replanteja la manera d'estudiar i entendre correctament l'aportació d'una figura sovint injuriada, com en Lamarck (Camós). Finalment, tanquem amb una aportació que, des de la història feminista i els estudis de gènere en la ciència, mostra com Rosa Sensat, seguint un corrent ben consolidat a Europa, elaborà un text destinat a l'educació científica de les mestresses de casa. Es proposa que aquests textos puguin ser emprats actualment per facilitar l'aprenentatge de determinats conceptes (Solsona).

Carmel Ferragud

Institut Interuniversitari López
Piñero, Universitat de València

Maria Rosa Massa-Esteve

Universitat Politècnica
de Catalunya

FÍSICA DE MUSEU: ÚS D'APARELLS CIENTÍFICS HISTÒRICS PER A L'ENSENYAMENT DE LA FÍSICA. EXEMPLES DE LA COL·LECCIÓ DE LA FACULTAT DE FÍSICA DE LA UNIVERSITAT DE BARCELONA

**ANTONIO MARZOA;^{1, 2} SANTIAGO VALLMITJANA;²
JOAN MANEL HERNÁNDEZ³**

¹ UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA;

² SENER AEROESPACIAL, S.A.

³ UNIVERSITAT DE BARCELONA

Resum: L'ensenyament de la física, com a ciència experimental, actualment es basa en tres punts fonamentals: la presentació dels continguts teòrics, la resolució de problemes i l'experimentació mitjançant practiques de laboratori o bé demostracions experimentals magistrals. Aquesta comunicació se centra en aquest tercer punt, posant de manifest el paper clau que poden jugar els instruments i aparells científics antics en les aules, tant per a l'ensenyament de la pròpia matèria en sí (en aquest cas, la física), com en l'estudi de la història de la ciència i del seu ensenyament, tot aprofitant el fet de que existeix en una ampla xarxa de col·leccions històriques d'aparells científics en facultats, instituts i escoles arreu del territori i de l'Estat, potencialment explotables com a eina docent. Agafant com exemple la Col·lecció d'Instruments Científics de la Facultat de Física de la Universitat de Barcelona (UB), que representa un testimoni material de l'ensenyament de la física experimental a la UB des de mitjans del segle XIX, es mostraran diferents exemples de potencials pràctiques i treballs d'estudiants amb instrumental històric, posant de manifest la utilitat docent de les col·leccions històriques, més enllà del punt de vista museològic.

Paraules clau: Instruments científics, instruments antics, col·leccions universitàries, física experimental, experiments didàctics.

Museum physics: use of historical scientific instruments in the teaching of physics. Examples from the collection of the Faculty of Physics of the University of Barcelona

Abstract: The teaching of Physics, as an Experimental Science, currently relies on three fundamental points: the presentation of the theoretical content, problem-solving sessions, and experimentation through laboratory practices or masterful experimental demonstrations. This communication focuses on this third aspect, highlighting the key role that ancient scientific instruments and apparatus potentially can play in classrooms, both for teaching the subject itself (in this case, Physics), and in the study of the History of Science and its instruction, taking advantage of the fact that there exists a wide network of historical collections of scientific instruments in Faculties, Institutes, and Schools across the country, which are potentially exploitable as a teaching tool. Taking as an example the Collection of Scientific Instruments of the Faculty of Physics of the University of Barcelona (UB), which represents a material testimony of the teaching of Experimental Physics at UB since the mid-19th century, different examples of potential practices and student work with historical instrumentation will be shown, highlighting the educational utility of historical collections, beyond the exhibitory point of view.

Keywords: Scientific instruments, antique instruments, university collections, experimental physics, didactic experiments.

La Col·lecció d'Instruments de la Facultat de Física de la Universitat de Barcelona

Les ciències experimentals fonamenten gran part de la seva base en els instruments científics, fet que els proporciona un paper fonamental com a eina per a l'estudi del saber i del coneixement humà. En l'àmbit de la història de la ciència, el continuat interès per part dels professionals (investigadors i historiadors) per les fonts materials de la ciència experimental ha motivat la preservació i l'estudi dels instruments científics, fins a arribar a la definició d'una especialitat i branca de treball concreta.

La Universitat de Barcelona (UB), com a institució acadèmica des del 1550, compta amb una llarga tradició educativa i en recerca, i el testimoni d'aquesta història queda reflectit en l'ampli ventall de material que ha sobreviscut fins a arribar als nostres dies, tant documental com instrumental (Bosch *et al.* 1998a, 1998b, Clemente *et al.*, 2008; Vallmitjana, 2010). El patrimoni instrumental científic de la UB avui dia es troba aglutinat en la Col·lecció d'Instruments Científics de la UB, emparada sota el seu Museu Virtual.¹ Aquesta col·lecció està constituïda per una gran diversitat i nombre d'aparells científics antics que son testimoni de l'evolució de la docència i de la recerca a la UB entre els segles XVIII i XX. Els elements de la Col·lecció es troben ubicats en les Facultats de Medicina i Ciències de la Salut, Psicologia, Farmàcia i Ciències de l'Alimentació, Biologia, Informació i Mitjans Audiovisuals, Física i Química. En el cas concret de la Facultat de Física de la UB, es té una important col·lecció de divers instrumental científic acumulat durant més de cent cinquanta anys d'història, que comprèn diversos camps de la física (Vallmitjana, 2011).

L'ensenyament de la física experimental a la Universitat de Barcelona

Com a conseqüència del trasllat de la UB a Cervera l'any 1714 pel decret de Felip V, no existeixen evidències documentals de l'ensenyament de la física experimental a la UB en els primers anys d'història d'aquesta institució (Bosch *et al.* 1998a; Vallmitjana, 2010). Com a reacció a aquest trasllat, apareixen diferents escoles amb ensenyaments de caràcter universitari a la Ciutat Comtal, tals com la Reial Acadèmia Militar de Matemàtiques (1720-1803), el Col·legi de Cirurgia de Barcelona (1760-1843) i la Junta de Comerç (1769-1851), en les quals consta que s'imparteix l'ensenyament

1. Museu Virtual de la Universitat de Barcelona <<https://museuvirtual.ub.edu/>> [Consultat el 14 d'abril de 2025]

de la matèria de física (Puig Pla, 2000). Aquesta particularitat, junt amb l'interès per la física experimental, i d'altres motivacions (Balari Jovany, 1985; Nieto Galan i Roca-Rosell, 2000), propicia la creació de la Reial Acadèmia de Ciències i Arts de Barcelona el 1764 (inicialment amb el nom de Conferència Fisicomatemàtica Experimental), la qual serà una institució que es farà càrrec de l'ensenyament d'aquesta matèria en les següents dècades.

Seguint aquesta línia, l'any 1814, la Junta de Comerç crea l'Escola de Física Experimental (Puig Pla, 2000) i, finalment, l'any 1842 es restitueix la Universitat a Barcelona (Universitat de Barcelona, 1898: 161), on també es torna a impartir docència en l'àmbit de la física experimental. En particular, en els anuaris que ens lleven dels cursos acadèmics de la tercera i quarta part del segle XIX compten assignatures com «ampliació de física experimental», impartides en l'aleshores coneguda com a Facultat de Ciències Exactes, Físiques i Naturals. Concretament, aquesta assignatura fou impartida en el curs acadèmic 1887-1888 pel catedràtic Bartolomé Feliú Pérez (1843-1918) i, en el curs 1896-1897, pel professor Eduardo Lozano y Ponce de León (1844-1927). Ambdós professors van escriure llibres de física general en els quals es mostraven nombroses il·lustracions que han servit per a identificar i datar alguns dels elements de la Col·lecció.

Cal dir que el primer catedràtic de física experimental de la UB va ser Antoni Rave i Bergnes (1818-1883), el qual també va ser professor substitut temporal de Pere Vieta Gibert (1778-1856), primer catedràtic de física experimental el 1814 a l'Escola de Física de la Junta de Comerç (Puig Pla, 2000). Pere Vieta fa fer classes en la restaurada UB (que li va reconèixer la càtedra) entre els cursos 1844 a 1855, i Antoni Rave (que guanyà la càtedra el 1857) des del 1848 fins al 1886, i també va ser professor de l'assignatura creada «ampliació de física experimental» (Vallmitjana, 2010). Aquestes assignatures requerien del material instrumental pertinent per a la seva docència (Ausejo, 2007). En l'anuari del curs acadèmic 1897-1898 (Universitat de Barcelona, 1898: 163) es presenten les instal·lacions de la Facultat de Ciències i es dona una descripció detallada de l'aleshores conegut com a Gabinet de Física (Clemente *et al.*, 2008) i, d'aquesta mateixa època, existeix constància documental de l'adquisició de divers instrumental per a la docència de la física i de la química experimentals en els corresponents gabinets (concretament un llistat de l'any 1868 de 220 instruments per a física i 130 per a química), tot seguint les recomanacions del conegut pla Pidal (1845) (Ausejo, 2007) i de la llei Moyano (1857) (Sevilla, 2007; Montero, 2009).

La gestació de la Col·lecció d'Instruments Científics de la Facultat de Física: 1987-2009

Atès el continu desenvolupament científic al llarg dels anys, la instrumentació lligada a la recerca i a la docència de la Facultat de Física (nascuda com a tal l'any 1974) s'ha anat actualitzant al mateix ritme que la part més obsoleta s'ha anat eliminant a causa de les necessitats creixents de remodelació dels espais. Afortunadament, una petita part va quedar arraconada en magatzems. Inicialment els instruments que van sobreviure estaven acumulats sense cura en un magatzem de la Facultat, després d'haver sofert diversos trasllats, inclòs el pas de l'Edifici Històric a Pedralbes l'any 1969 (Clemente *et al.*, 2008).

En aquest context de falta d'espai i, a vegades, aplicabilitat de l'equipament obsolet, entre els anys 1987 i 1997 es va iniciar una recuperació d'una cinquantena d'instruments del segle anterior. Gràcies a aquesta primera etapa, l'any 1995 s'aconsegueix instal·lar cinc grans vitrines a la sala de juntes de la Facultat de Física, com a lloc d'exposició permanent de la recentment creada Col·lecció d'Instruments Científics de la Facultat de Física (d'ara endavant referida com a «Col·lecció» en el text). La concessió de tres projectes de recerca (PT2008-S0201, HAR2008-02580-E/HIST i CCT006-

06-00257) permeté una tasca d'inventariat i recuperació de fins a 200 instruments durant la primera dècada del segle XXI, ampliant també el nombre de vitrines disponibles a la Facultat per a l'exposició de la Col·lecció. Aquesta feina, junt amb la difusió del patrimoni recuperat, culmina amb la creació d'una base de dades i la publicació d'un primer catàleg (Vallmitjana, 2011) de la Col·lecció.

Estat actual de la Col·lecció

Durant la segona dècada del segle XXI s'ha continuat amb la tasca de recerca i recuperació de l'instrumental de la Facultat de Física, el qual comprèn un estès període entre finals del segle XIX i finals del segle XX. L'any 2021 s'adquireixen noves vitrines i el nombre d'instruments catalogats supera el mig miler. En aquesta nova etapa s'aprova una Comissió de la Col·lecció en Junta de Facultat a data de 28/06/2022 i s'inicia la primera exposició (vegeu la fig. 1), que s'inaugura el mateix any. Paral·lelament, es constitueix la Comissió Assessora del Patrimoni Cultural de la UB, a la qual la Col·lecció de la Facultat de Física s'incorpora el 2023, i en data de 16/02/2023 es fa la reunió de presentació del Reglament de Patrimoni Cultural.



FIGURA 1. Exposició actual al vestíbul de la Facultat de Física.

FONT: Elaboració pròpia.

Des de la gestació de la Col·lecció fins a l'època actual s'ha recuperat un total de 570 instruments i s'ha pogut explotar la Col·lecció com a eina educativa i de recerca històrica, amb la publicació de 8 articles científics, més de 60 comunicacions a congressos científics i 3 capítols de llibre, a més de tres projectes finals de carrera, diverses col·laboracions i cessions amb altres entitats, i 11 convenis de pràctiques d'empresa amb estudiants de la UB.

Activitats docents amb la Col·lecció

Com s'ha mostrat a partir de la producció acadèmica dels darrers anys al final de la secció anterior, a més del seu paper com a testimoni material de la història de la recerca i docència en ciències experimentals dutes a terme a la Facultat de Física, la Col·lecció d'Instruments Científics té la

intenció i funció de ser una eina de difusió del coneixement en l'àmbit de les ciències físiques. Amb aquesta intenció, en paral·lel a la preservació i ampliació de la Col·lecció, s'ha dut a terme una tasca constant d'explotació dels instruments en diferents activitats docents de la Facultat de Física. En aquesta secció detallem els treballs duts a terme en els diferents àmbits d'explotació de la Col·lecció

Pràctiques d'empresa

L'assignatura de pràctiques d'empresa és una assignatura optativa del Grau de Física de la UB de 6 crèdits ECTS. En el marc d'aquesta signatura s'han proposat i dut a terme diferents convenis amb estudiants que s'han encarregat de treballar en el manteniment de la catalogació. Les tasques dutes a terme pels estudiants consisteixen bàsicament en el manteniment i ampliació del catàleg i base de dades de la Col·lecció.

Les dues tasques principals han estat:

a) Revisió d'elements ja fitxats en la col·lecció. Els estudiants han complementat les dades de la fitxa de cada element, per exemple, tot identificant el fabricant o bé datant l'instrument a partir de la recerca en llibres on es descriu l'aparell o experiment en què aquest intervé (Ganot 1859; Feliu Pérez, 1922; Lozano y Ponce de León, 1898).

b) Introducció d'elements nous en la base de dades. Els estudiants han creat fitxes per a nous elements en el catàleg, tot identificant l'objecte, el nom i elaborant una descripció i fotografia, a més de dur a terme recerca de texts on es pot trobar la corresponent referència de l'instrument.

Aquesta activitat ha estat duta a terme en els darrers anys per diferents alumnes de la Facultat de Física, tal com es llista a continuació:

- I. Ricart (curs 2013-14); manteniment de la base de dades de la Col·lecció.
- A. Marzoa (cursos 2014-15 i 2015-16); manteniment de la base de dades i incorporació de nous elements.
- A. Buñuel (curs 2016-17); presa i neteja d'imatges d'elements ja fitxats.
- M. Martos (curs 2017-18); estudi dels diferents textos docents que es fan servir com a referència bibliogràfica.
- Molina (curs 2018-19); manteniment de la base de dades.
- A. Torres (curs 2020-21); ajuda en recerca bibliogràfica i datació.
- M. Vázquez (curs 2021-22); ajuda en recerca bibliogràfica i datació.
- L. Cardona (curs 2021-22); fotografia i digitalització de documentació.
- L. Parra (curs 2022-23); cerca bibliogràfica (tubs de descàrrega i de Crookes).
- S. Rodríguez (curs 2023-24); fotografia i valoració econòmica.
- P. Romà (curs 2023-24); ajuda en recerca bibliogràfica i datació.

En totes les edicions, l'activitat ha permès sensibilitzar els estudiants en la importància del manteniment de la Col·lecció i de la preservació del patrimoni material en ciència, a més de permetre una ampliació de la base de dades de la Col·lecció i del coneixement dels elements que la conformen.

Treball Final de Grau

El Treball Final de Grau (TFG) és una assignatura obligatòria del Grau de Física de la UB de 6 crèdits ECTS en què l'estudiant ha de desenvolupar durant un semestre un treball d'investigació (teòric, experimental o bé bibliogràfic) com a final de la seva formació acadèmica, que culmina en la redacció d'un article científic d'unes cinc pàgines i una defensa oral d'uns 15 minuts de durada. Fins a la data s'han dut a terme tres TFG (vegeu la taula 1).

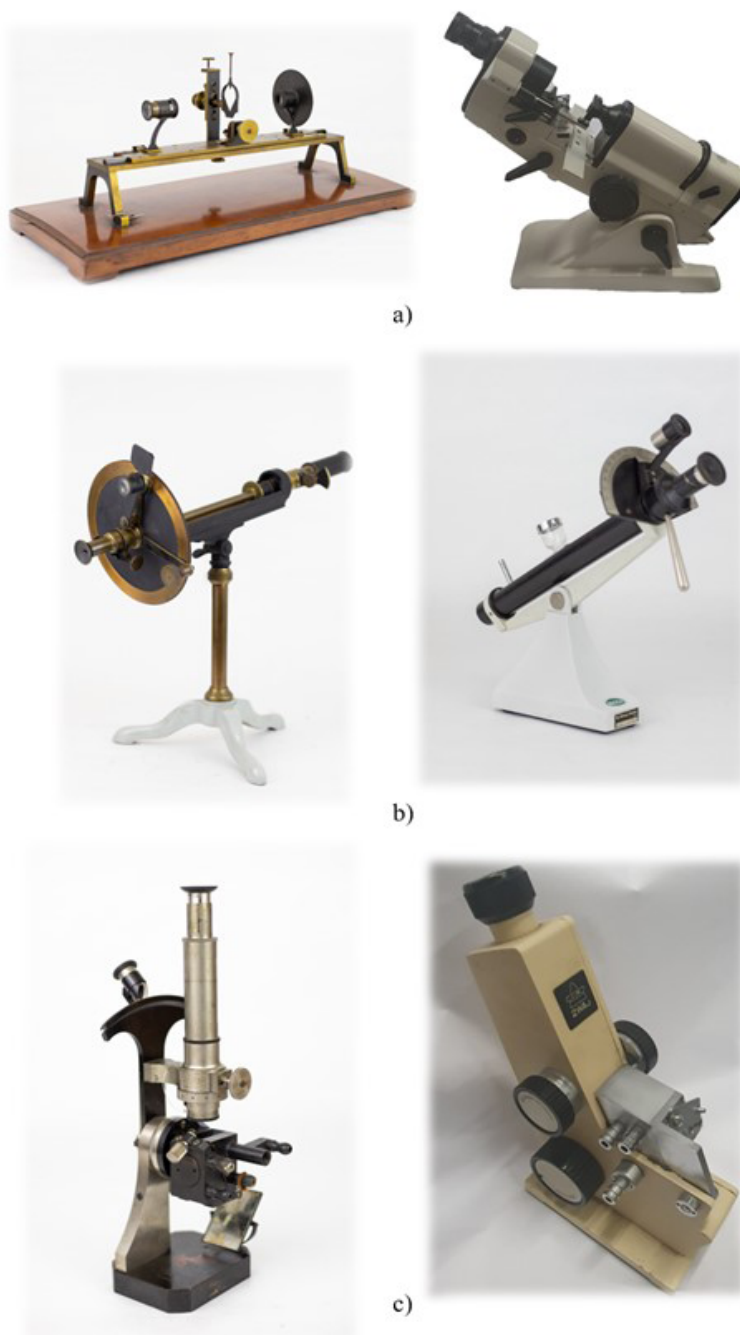


FIGURA 2. TFG Exemple comparatiu d'instruments òptics històrics amb la seva versió moderna en el marc d'un dels TFG duts a terme: a) frontofocòmetre (mesura de potències òptiques), b) polarímetre (mesura de concentracions de glucosa), i c) refractòmetre d'Abbe (mesura de l'índex de refracció de líquids i vidres plans).

FONT: Elaboració pròpia.

TAULA 1. TFG duts a terme fins a la data de publicació d'aquest treball, en els quals s'han emprat instruments històrics de la Col·lecció.

<i>Any de defensa</i>	<i>Estudiant</i>	<i>Títol del Treball</i>	<i>Director</i>
2020	Cristina Briones Rodríguez	Analysis and comparison of XIX and XX century spectroscopy	Prof. Santiago Vallmitjana Rico
2021	Alexandre Torres Alonso	Vintage Technology. Measurements with Antique instrumentation	Prof. Santiago Vallmitjana Rico
2023	Júlia García de la Torre	Replication of Coulomb's torsion balance experiment	Dr. Enric Pérez i Dr. Joan Manel Hernández

FONT: Elaboració pròpia.

Aquests tres treballs s'han basat en l'estudi d'instruments concrets de la Col·lecció. En particular, els dos primers s'han centrat en la comparativa d'instruments òptics pertanyents a la Col·lecció amb les seves versions modernes, les quals els estudiants ja havien pogut emprar en els laboratoris de grau durant la seva formació. En aquestes dues anàlisis els estudiants han tingut la oportunitat de realitzar les mateixes mesures amb aparells que estan fabricats amb gairebé 200 anys de diferència, podent comparar així la manera en què es realitzen les mesures en cada cas, les limitacions pràctiques i la resolució dels equips moderns i antics (la figura 2 mostra alguns exemples dels instruments analitzats en el marc d'aquests TFG). Aquest tipus d'estudi amb elements de la Col·lecció ja s'havia dut a terme des de la seva gènesi (Vallmitjana, 2008).

L'altre treball s'ha centrat en la restauració d'un aparell científic antic i en la recreació d'una experiència històrica en el laboratori de docència, tot emprant material de laboratori modern com a suport en l'experiment. L'estudi va permetre a l'estudiant avaluar les mesures històriques relacionades amb l'aparell que han estat tema de debat en diferents treballs d'història de la ciència.

Explotació de la Col·lecció en diferents assignatures de la Facultat de Física

A més de les activitats de recerca i manteniment dels elements de la Col·lecció dutes a terme per estudiants (essencialment la realització d'unes pràctiques per a cuidar i actualitzar la base de dades, i una recerca experimental en forma de tres TFG), en els darrers anys, s'ha vingut incorporant la Col·lecció com a recurs docent complementari en diferents assignatures de la Facultat de Física. D'aquesta manera, es pretén poder emprar els instruments com a eina educativa, ja sigui realitzant demostracions magistrals per part del professor a l'aula, o bé permetent als estudiants manipular els aparells històrics, de la mateixa manera que s'ha dut a terme en els TFG explicats anteriorment.

Un altre ús de la Col·lecció és a través de l'ús d'exposicions que es poden visitar, tant per part dels estudiants de la Facultat, com pel públic en general. D'aquesta manera, des de l'any 2022 es porten realitzant visites guiades a l'exposició actual de la Col·lecció (vegeu la fig. 1). Aquestes visites permeten contextualitzar alguns dels experiments i fenòmens comentats a les classes de teoria i, al mateix torn, ajuden a donar visibilitat de la Col·lecció dins de la mateixa Facultat.

La Taula 2 mostra un resum d'aquestes activitats complementàries dutes a terme amb elements de la Col·lecció en el marc de diferents assignatures impartides a la Facultat de Física (incloses les pràctiques d'empresa i el TFG, comentats prèviament).

TAULA 2. Exemples d'exploració dels elements de la Col·lecció en diferents assignatures impartides a la Facultat de Física.

<i>Assignatura</i>	<i>Professor responsable</i>	<i>Titulació</i>	<i>Caràcter de l'assignatura</i>	<i>Treball realitzat pels estudiants</i>
Història de la Física	Dr. Enric Pérez Canals	Grau de Física i Grau Doble de Física i Matemàtiques	Optativa de 3r curs	Estudi dels tubs de descàrrega de la Facultat de Física
Laboratori de Física Moderna	Dr. Joan Manel Hernández Ferràs Dr. Enric Pérez Canals	Grau de Física	Obligatòria de la menció en Física Fonamental i optativa per a Física Aplicada de 4t curs	S'empren els tubs de descàrrega i de raigs catòdics com a antecedents de l'experiment de J. J. Thompson de la mesura de la relació e/m (demostració per part del professor)
Fonament d'Electromagnetisme i Òptica	Dr. Pere Serra	Grau de Física, Grau d'Enginyeria Electrònica de Telecomunicacions i Grau Doble de Física i Matemàtiques	Obligatòria de 1r curs	Diverses visites al llarg del semestre segons es va avançant en el temari a l'exposició sobre la història de l'electromagnetisme
Pràctiques d'empresa	Dr. Joan Manel Hernández Ferràs	Grau de Física, Grau d'Enginyeria Electrònica de Telecomunicacions i Grau Doble de Física i Matemàtiques	Optativa de 3r i 4t curs	Col·laboració en els tasques de catalogació de la Col·lecció d'Instrumentes Científics de la Facultat de Física
Treball Final de Grau	Dr. Joan Manel Hernández Ferràs Dr. Enric Pérez Canals	Grau de Física	Obligatòria de 4t curs	Estudi de diferents instruments antics
Laboratori de Fotònica	Prof. Santiago Vallmitjana Rico Prof. Ignasi Juvels Prades	Màster en Fotònica	Obligatòria (pràctica actualment extingida)	Recreació de les observacions de Galileo Galilei mitjançant simulacions i la construcció de dos telescopis diferents. Comparativa d'un microscopi modern amb un d'antic utilitzant una càmera <i>lúcida</i> de la Col·lecció

FONT: Elaboració pròpia.

Reflexions sobre l'impacte de les activitats

L'experiència recollida en la secció anterior a través de diverses activitats dutes a terme amb estudiants i emprant la Col·lecció com a eina educativa posa de manifest les possibilitats que

ofereixen les col·leccions d'instruments científics, més enllà de l'exposició museològica.

En l'àmbit de l'ensenyament de les ciències experimentals, sovint es tendeix a intentar fer pràctiques demostratives minimitzant el material o emprant simulacions, bé per manca de recursos o bé per la fragilitat i delicadesa de l'instrumental necessari. Aquests recursos docents que, sens dubte, ofereixen molts avantatges i possibilitats educatives sovint eliminen el component experimental i de manipulació (el que en anglès s'anomena *hands-on experience*) de l'instrumental. A més a més, sovint els equipaments més moderns tendeixen a fer les mesures de forma automàtica, amb un processat mitjançant l'electrònica interna que converteix els aparells en «caixes negres» per a l'usuari. En canvi, els instruments antics sovint permeten poder analitzar amb més detall els principis físics en els quals es basa el seu funcionament, el que proporciona una altra dimensió en l'experiència d'una pràctica de laboratori. Aquest mateix punt d'interès ha estat posat de manifest també per altres autors; vegeu per exemple (Jewett, 2015 i 2016).

D'altra banda, tal com també han exposat altres autors (Cascarosa-Salillas *et al.*, 2021; Greenslade, 2020), els instruments antics poden emprar-se com a eina didàctica a l'hora d'introduir conceptes i principis físics, el que permet tant mostrar-los com a peces de museu com tornar a donar-los el seu paper de, en molts casos, eines per a demostracions magistrals en què es recreen experiències mostrades en llibres antics (Greenslade i Owens, 1980) o experiments i observacions crucials en la història de la ciència (Marzoa i Vallmitjana, 2024).

Les activitats presentades en aquesta comunicació són perfectament extrapolables a altres contexts, àrees del coneixement i col·leccions. A l'Estat existeix un llarg ventall de col·leccions d'instruments científics antics, tant en l'àmbit d'educació secundària, com és el cas dels instituts històrics (JORNADA, 2011; Medina, 2020; Aragón *et al.*, 2007), o a nivell universitari (serveixen com a exemple la Col·lecció subjecte d'aquest treball (González i Baratas, 2007) o COMIC), fet que porta als autors d'aquesta comunicació a convidar a altres educadors i investigadors que tinguin contacte amb aquestes col·leccions a intentar reproduir, millorar i ampliar les experiències exposades en aquest treball, així com intentar preservar el patrimoni instrumental que puguin trobar els possibles lectors d'aquestes línies, tal com suggereixen altres autors (Birriel, 2021).

Per acabar, i enfocant-nos en l'estudi de la història de la ciència, és important comentar que les col·leccions científiques són una font primària important per als historiadors d'aquesta disciplina (García i Mayoni, 2013), i que conèixer també el funcionament i limitacions dels instruments científics en un determinat període històric permet avaluar també les limitacions del coneixement i els corrents de pensament en aquell moment (Marzoa i Vallmitjana, 2021a), ja que, com s'ha esmentat en aquest mateix treball, els instruments científics i les capacitats d'aquests constitueixen la base del coneixement de les ciències experimentals i són les eines que permeten «ampliar» els nostres cinc sentits per a explorar la natura. Pensem, per exemple, en el cas del descobriment dels anells de Saturn per part de Galileo Galilei (Marzoa, 2022; Marzoa i Vallmitjana, 2021b, 2024) o de les estructures cel·lulars per Robert Hooke. Sens dubte, aquests descobriments no haguessin estat possibles en el seu moment sense el desenvolupament tecnològic lligat als instruments científics que van emprar aquests científics. De fet, en el cas dels anells de Saturn, va ser necessari continuar amb observacions amb telescopis més refinats que els de Galileu per a concloure quina era la naturalesa d'aquestes estructures (Marzoa, 2022). I si se segueix amb l'exemple de l'astronomia, avui en dia les tecnologies com l'òptica adaptativa (Vallmitjana, 2009) ofereixen unes capacitats d'observació i resolució inimaginables per Galileu.

Aquests exemples posen de manifest el fort lligam entre la qualitat i limitacions dels instruments científics en cada moment de la història de la humanitat i la gestació d'hipòtesis, idees i teories científiques, que poden ser una eina molt interessant tant per a l'investigador d'història de la ciència i del pensament, com per a convidar a la reflexió a l'aula. Sovint l'aparell històric queda amagat sota una boira mística que l'experiència directa pot arribar a difuminar, permetent a l'estudiant (o a l'investigador) empatitzar amb el personatge històric o el moment de la història en què aquell instrument es va concebre i emprar per a la docència o per a la recerca científica.

En definitiva, el treball i la familiarització amb instruments històrics, més enllà de l'exposició purament museològica, permet a l'espectador ser alhora actor i poder comprendre i sensibilitzar-se amb la importància de la preservació d'aquestes col·leccions, un fet que n'ajudarà a la promoció i supervivència.

Referències bibliogràfiques

- ARAGÓN, Santiago [et al.] (2007). «Las colecciones científicas universitarias, un patrimonio en proceso de recuperación». *Revista de Museología*, 38, p. 72-80.
- AUSEJO, Elena (2007). «La enseñanza de las ciencias exactas, físicas y naturales y la emergencia del científico». *Técnica e Ingeniería en España V. El Ochocientos: Profesiones e Instituciones Civiles* [Saragossa: Institución Fernando el Católico (Diputación de Zaragoza)], 5, p. 507-550.
- BALARI I JOVANY, José (1985). *Historia de la Real Academia de Ciencias y Artes: Memoria inaugural del año académico de 1893 á 1894*. Barcelona: L'Avenç.
- BIRRIEL, Jennifer (2021). «A small historical equipment display». *The Physics Teacher*, 59, p. 732.
- BOSCH, Salvador; JUVELLS, Ignasi; VALLMITJANA, Santiago (1998a). «L'ensenyament de les ciències a la Universitat de Cervera». *Palestra Universitària* [Cervera: UNED], 10, p. 115-127.
- (1998b). «La Ciència i la Tècnica a Catalunya: La visió de la Física al segle XVIII». Catàleg de l'exposició «25 anys d'UNED a Cervera 1973/98». Cervera: UNED, p. 19-21.
- CASCAROSA-SALILLAS, Esther; POZUELO-MUÑOZ, Jorge; FERINGÁN, Beatriz (2020). «Old instruments in the physics and chemistry cabinet at Goya Secondary School. Analysis of their didactic use in teaching physics today». *Culture and Education*, 33 (3), p. 556-572.
- CLEMENTE, Carme; PÉREZ-BLANCO, Francisco José; VALLMITJANA, Santiago (2008). «La restauració d'instruments de Física de la Universitat de Barcelona». *Actes d'Història de la Ciència i de la Tècnica*, 1, p. 35-44.
- COMIC (2008). *Els instruments científics. Un catàleg col·lectiu del patrimoni científic*. València: Universitat de València. <<https://instruments.uv.es/es>>.
- FELIU PÉREZ, Bartolomé (1922). *Curso de Física*. Madrid: Imprenta hijos de Gómez Fuentenebro. 12a ed.
- GANOT, Adolphe (1859). *Tratado elemental de física experimental y aplicada y de meteorología*. 7a ed. Madrid: Librería de Carlos Bailly-Baillière.
- GARCÍA, Susana; MAYONI, María Gabriela (2013). «Las colecciones de enseñanza científica como fuentes para la Historia de la ciencia». *Revista Electrónica FuFuentes y Archivos*, 4 (4), p. 110-125.
- GREENSLADE, Thomas; OWENS, Aaron (1980). «Reconstructed nineteenth-century experiment with physical pendula». *American Journal of Physics*, 48 (6), p. 487.
- GREENSLADE, Thomas (2020). «Adventures with historical physics apparatus». *American Journal of Physics*, 88, p. 864-870.
- GONZÁLEZ, Antonio; BARATAS, Alfredo (2007). *Museos y colecciones histórico-científicas de las universidades madrileñas: El Patrimonio de Minerva*. Madrid: Oficina de Información Científica de Madrid. También disponible en línea a: <<https://www.madrimasd.org/sites/default/files/documents/museosdeciencia.pdf>>.
- JEWETT, John (2015). «Bringing (Century-Old) Technology into the Classroom, Part I: Teaching Mechanics and Thermodynamics with Antiques». *The Physics Teacher*, 53, p. 428-431.
- (2016). «Bringing (Century-Old) Technology into the Classroom, Part II: Teaching Vibrations and Waves, Electricity and Magnetism, and Optics with Antiques». *The Physics Teacher*, 54, p. 24-27.
- Jornada De Trabajo (2011): «Los institutos históricos: memoria y patrimonio». <<https://www.educacionyfp.gob.es/dam/jcr:9607ce2a-ebb8-4351-b043-b9a4d777f4e9/jornada-2011-institutos-historicos-pdf.pdf>>.
- LOZANO Y PONCE DE LEÓN, Eduardo. (1898). *Elementos de Física*. 6ª ed. Barcelona: Jaime Jepús y Roviralta.
- MARZOA, Antonio; VALLMITJANA, Santiago (2021). «Image quality analysis of an antique microscope objective with a Shack-Hartmann wavefront sensor: an experiment of educational interest». *Óptica Pura y Aplicada*, 54 (2), p. 1-18.
- MARZOA, Antonio; VALLMITJANA, Santiago (2021). «Understanding Resolution with Galileo's Telescopes». A: DANNER, Aaron; POULIN-GIRARD, Anne-Sophie; WONG, Nicholas (eds.). *Education and Training in Optics & Photonics Conference 2021*. OSA Technical Digest. Optica Publishing Group, 2021

MARZOA, Antonio (2022). «Galileo y las orejas de Saturno: la importancia de la resolución». *Astronomía*, 275 (30), p. 31-37.

MARZOA, Antonio; VALLMITJANA, Santiago (2024). «Dealing with telescopes magnification and resolution: recreating Galileo's observations in the lab». *Education and Training in Optical Instrumentation and Lens/Illumination Design* special issue of *Optical Engineering* [SPIE], 63 (7), 071412 (2024).

MEDINA, Francisco José (2020). *Las colecciones científicas de los institutos históricos de Andalucía: investigación y análisis de su museografía y los procesos de conservación y restauración*. Tesis doctoral. Sevilla: Universidad de Sevilla.

NIETO GALAN, Agustí; ROCA ROSELL, Antoni (coord.) (2000). *La Reial Acadèmia de Ciències i Arts de Barcelona als segles XVIII i XIX: història, ciència i societat*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans.

PUIG-PLA, Carles. (2007). «De la física experimental a la física industrial (1814-1851). Anàlisi d'una càtedra barcelonina». *Quaderns d'Història de l'Enginyeria*, 7, p. 119-172.

SEVILLA, Diego (2007). «La Ley Moyano y el desarrollo de la educación en España». Hespérides: *Anuario de investigaciones*, 40, p. 110-124.

MONTERO, Antonio (2009). «Una ley centenaria: la ley de instrucción pública (Ley Moyano, 1857)». *Revista Muesca*, 1, p. 105-127.

VALLMITJANA, Santiago (2008). «El refractòmetre d'Abbe, una eina important en la recerca i en la indústria. Estudi d'un exemplar de principis del segle XX». *Actes d'Història de la Ciència i de la Tècnica*, 1 (1), p. 119-128.

— (2009). «25 anys d'òptica : què podem veure que no vèiem abans?», *Revista de Física*, 4 (7), p. 32-40.

— (2010). «L'Ensenyament de Física». A: *La Universitat de Barcelona. Libertas perfundet omnia luce. Història dels Ensenyaments (1450-2010)*. Barcelona: Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona.

— (2022). *Instrumentos científicos. Catálogo de la Facultad de Física de la Universidad de Barcelona*. Barcelona: Publicacions de la Universitat de Barcelona.

UNA BALANÇA DE COULOMB PETITA A LA VITRINA

JÚLIA GARCÍA; JOAN MANEL HERNÁNDEZ; ENRIC PÉREZ
UNIVERSITAT DE BARCELONA

Resum: Reflexionem sobre la nostra experiència en restaurar i documentar un instrument emblemàtic de la col·lecció històrica de la Facultat de Física de la Universitat de Barcelona. Es tracta d'una balança elèctrica de torsió comprada a mitjan segle XIX per al gabinet de física de la universitat. Hem mirat de recuperar el seu estat original i posar-la en funcionament. A la llum dels resultats obtinguts, comentarem la polèmica sobre la versemblança de les dades presentades per Coulomb el 1785. Mostrarem que l'estudi d'un objecte com aquest és una molt bona manera d'introduir la història de la ciència a l'aula, especialment pel que fa al paper de coneixements tècnics pràctics, que no acostumen a formar part de les narracions habituals de la disciplina.

Paraules clau: electricitat, Coulomb, balança de torsió, història de la física.

A small Coulomb balance in the showcase

Abstract: We reflect on our experience in restoring and documenting an emblematic instrument of the historical collection of the Faculty of Physics of the University of Barcelona. It is an electric torsion balance purchased in the middle of the 19th century for the Gabinet de Física of the university. We have tried to recover its original state and put it into operation. In the light of the obtained results, we will comment on the controversy that took place about the reliability of the data presented by Coulomb in 1785. We will show that the study of an object like this is an excellent way to introduce the history of science in the classroom, especially regarding the role of practical technical knowledge, which usually is not part of the narratives of the discipline.

Keywords: electricity, Coulomb, torsion balance, history of physics.

Introducció

En les darreres dècades l'estudi de la cultura material científica està rebent l'atenció dels historiadors. La rellevància creixent dels museus i l'abundància de col·leccions i gabinets d'instruments particulars o pertanyents a centres educatius han plantejat diverses qüestions (Lourenço i Wilson, 2013). Per exemple, com fer

una restauració acurada o una catalogació fidel d'objectes que en molts casos han passat unes quantes dècades oblidats en magatzems. També els estudis recents que tracten d'ampliar el focus més enllà dels avenços teòrics i il·luminar la praxi experimental, el paper dels tècnics i el coneixement tàcit, han fomentat que aquesta herència es posi en valor.

A la Facultat de Física disposem d'una col·lecció d'instruments científics que provenen de diverses seccions, departaments, facultats, gabinets, etc., de la Universitat de Barcelona.¹ Molts objectes, també els més antics, daten de mitjan segle XIX. La temàtica dels instruments és la pròpia de l'època, quan la física experimental estava en plena eclosió. Hi trobem aparells per a estudiar la calor, els fluids, la mecànica o l'òptica, entre d'altres subdisciplines. Els relacionats amb l'electromagnetisme en són una part molt important, i per aquest motiu protagonitzen una exposició permanent que es va inaugurar a la mateixa facultat el passat setembre de 2022.

En aquesta nota breu descriurem com resseguir la biografia d'un d'aquests ginys, una balança de Coulomb que actualment està a una de les vitrines de l'exposició, que ens ha permès endinsar-nos en la història de la pròpia institució, de l'electricitat, de l'experiment històric i de la seva replicació (vegeu la fig. 1).



FIGURA 1. La balança petita de Coulomb a la vitrina, després de la darrera restauració.
FONT: Elaboració pròpia.

L'objecte

La balança de la col·lecció la podem veure a la figura 2. Sobre un anell de fusta circular que fa de peu, descansa un cilindre de vidre (d'uns 30 cm d'altura per 30 cm de diàmetre) amb una cinta pautada al seu perímetre per a mesurar angles. Aquest cilindre té una tapa també de vidre on hi ha dos forats. Un al centre, on s'hi encaixa un altre cilindre molt més prim i llarg (uns 30 cm), i un altre descentrat,

1. Gran part del mèrit de la seva conservació cal agrair-la al professor Santiago Vallmitjana.

on s'hi pot introduir una petita peça de fusta que aguanta una vareta metàl·lica vertical amb una esfera metàl·lica a cada extrem.² El cilindre prim conté un mecanisme a la part superior per a penjar-hi en el seu eix central un fil metàl·lic que sosté una vareta horitzontal, a l'alçada de la cinta pautada, que té a un dels extrems una petita esfera, i un contrapès a l'altra. En l'estat ideal d'equilibri l'esfera que penja del fil i l'esfera fixa interior es trobarien al mateix lloc. Si estan carregades, se separaran fins fer oscil·lacions al voltant del punt d'equilibri entre la força de repulsió i la de torsió.

A un dels acabats de llautó hi podem llegir el nom del fabricant francès: Pixii Père et fils, successeurs de Dumotiez, de París. Aquest és un dels fabricants d'instruments científics més coneguts de mitjan segle XIX. En els seus catàlegs hi podem trobar una balança de Coulomb gran i una petita, com ara la de 1838.³ Com que Pixii es retirà al voltant de 1855 (Brenni, 2006: 15), sabem que la balança és anterior a aquest any.

La balança emprada per Coulomb (vegeu la fig. 3), tal com la descriu ell mateix (Coulomb, 1785) és més gran (en total fa uns 90 cm d'altura), i podem suposar que la que tenim a Barcelona és, doncs, petita. És pràcticament segur que es va adquirir en el marc del *Plan Pidal*, de 1845, quan el govern espanyol va proveir d'instruments els gabinets de física i química de les institucions d'ensenyament superior (Bertomeu Sánchez *et al.*, 2011). Cal emmarcar aquest esforç en una tendència general d'equipar les universitats i centres d'educació de material científic, tendència que comparteixen altres països europeus, ja que moltes de les col·leccions històriques actuals provenen d'aquesta època. El 28 d'octubre de 1846, es publicà la reial ordre que determinava que s'adquirissin instruments i aparells de física i química per a proveir les universitats. Pixii és un dels fabricants recomanats pel catàleg model que ofereixen per als instituts provincials de segona ensenyança, tot i que en el cas de la balança s'especifica un altre fabricant: Lerebours.⁴ L'adquisició es documenta el 1848, en la que seria la tretzena remesa d'instruments comprats.⁵ De manera que aquesta balança va formar part de les primeres compres de material per a la universitat un cop va tornar a Barcelona el 1837. Hem trobat també una donació de la Junta de Comerç de 1851 d'una altra balança de Coulomb, en aquest cas de sis peus (segurament, doncs, molt més gran que la que s'ha conservat) (Lusa Monforte, 2003). De moment, però, només hem pogut seguir el rastre d'una d'elles, que apareix en l'inventari del Gabinet de Física de la Facultat de Ciències, que el 1868 va signar el catedràtic de física Antoni Rave, com una balança de Coulomb «petita».

Hem mirat de trobar balances idèntiques a altres col·leccions a nivell nacional, sense èxit. No sempre és possible consultar els catàlegs en línia (en cas que n'hi hagi), per exemple, dels instituts de secundària a Espanya que disposen de materials anàlegs. Hem tingut més fortuna a nivell internacional, ja que hem trobat dues balances del mateix fabricant i model a dos instituts francesos: el Lycée Bertran de Born, de Perigús, i el Lycée Alain-Fournier, de Bordeus. D'altra banda, però, no és

2. Posteriorment vam descobrir que aquesta peça, segurament, no era la original, i que sí que ho era una altra que només disposa d'una esfera metàl·lica a la part inferior i un suport de fusta a la part superior. Vegeu la fig. 1.

3. *Catalogue des principaux instrumens de physique, chimie, optique, mathématiques et autres, a l'usage des sciences; qui se fabriquent chez Pixii Père et fils, successeurs de Dumotiez*. A Paris, Rue de Grenelle Saint-Germain, n° 18, 1838. Les balances es referencien a la pàgina 19.

4. *Colección legislativa de España (Continuación de la colección de decretos): Tercer Trimestre de 1846: Vol. XXXVIII* (1849). Imprenta Nacional, p. 354-355.

5. *Expediente sobre 13 remesas de máquinas, instrumentos de Física y Química (1847)*, Arxiu Històric de la Universitat de Barcelona, ES-CAT-UB-02-2944-7.

difícil trobar a la xarxa imatges d'instruments molt semblants en col·leccions diverses de França, Grècia o Itàlia. Gairebé sempre presenten algunes diferències, que podrien ser degudes a que el fabricant és diferent, però també conseqüència del pas del temps i les restauracions. De manera que malgrat no haver identificat gaires exemplars exactament iguals, podem dir que la balança elèctrica de torsió és un objecte habitual en les col·leccions d'instruments científics del segle XIX.



FIGURA 2. Balança de Coulomb de la Col·lecció d'Instruments Científics
Històrics de la Facultat de Física de la Universitat de Barcelona.
FONT: Museu Virtual de la UB.

L'estudi de l'electricitat i la física experimental

L'emergència de la física experimental de precisió coincideix amb la demarcació de la física, durant la primera meitat del segle XIX. De fet, aquesta associació amb els experiments de precisió (juntament amb la matematització) va continuar un procés que s'havia iniciat el segle anterior. Durant la Il·lustració es venia emprant la paraula «física» en tractats sobre fenòmens naturals inanimats que incloïen la mecànica, però abastava també fenòmens elèctrics o tèrmics, entre d'altres. Els experiments van acompanyar aquestes primeres investigacions, però va ser al segle XIX quan van esdevenir precisos i sistemàtics. La física francesa es troba en el centre d'aquesta transformació, i la invenció de la balança elèctrica de torsió n'és testimoni i exponent representatiu.

Charles-Augustin Coulomb va ser un enginyer que des del 1761 pertanyia al *Corps du Génie*, i que el 1781 va ser nomenat membre de l'Acadèmia Francesa de les Ciències.⁶ Va guanyar diversos premis científics i va llegir nombroses memòries relacionades inicialment amb la seva posició (construcció de canals, estàtica, fricció...). El que ens interessa aquí és el treball que va fer sobre la torsió dels materials a la dècada de 1770. Va inventar la balança de torsió per mesurar forces molt petites, com la variació diürna del camp magnètic terrestre. Aquest va ser el tema d'un premi

6. Sobre Coulomb i el seu context podeu consultar Gillmor (1971).

convocat per l'Acadèmia i que Coulomb va guanyar el 1777, perquè el seu aparell permetia fer mesures impracticables amb altres mètodes. Aquest èxit probablement va tenir molt a veure amb la seva elecció com a acadèmic.

El 1785 va presentar la primera memòria de set sobre electricitat i magnetisme: «Construction et usage d'une balance électrique, fondée sur la propriété qu'ont les fils de métal, d'avoir une force de réaction de torsion proportionnelle à l'angle de torsion. Determination expérimentale de la loi suivant laquelle les elements des corps électrisés du même gener d'électricité, se repoussent mutuellement» (Coulomb, 1785). Notem que en el títol presenta la seva balança abans que la llei experimental de repulsió. Un podria pensar que va utilitzar el seu invent per a mesurar la força elèctrica, i va trobar així la fórmula newtoniana coneguda avui com la llei de Coulomb (r és la distància entre càrregues):

$$F \sim \frac{1}{r^2}$$

Ara bé, com han posat de manifest diversos estudis historiogràfics, no està clar que aquesta descripció sigui la més plausible, atenent la informació disponible. Quan consultem la memòria en què va presentar el resultat de la seva recerca, observem que Coulomb només presenta tres dades que, a més, no sempre compleixen les condicions de fiabilitat que ell mateix proposa (per exemple, que la torsió del fil no pot excedir un cert angle per assegurar la linealitat de la força de torsió). Com comentarem més endavant, els intents de replicació d'aquest experiment evidencien que, com a mínim, la llei de proporció inversa del quadrat no és una deducció ostensible. Peter Heering, qui va fer els experiments a la Universitat de Oldenburg, i va encetar així un debat alhora prolífic i interessant entre els historiadors de la ciència, defensa inclús que les condicions de l'experiment fan gairebé impossible obtenir-la tal com Coulomb ho descriu (Heering, 1992).

És aquí on és útil acudir al context més general de la història de l'electricitat.⁷ A la segona meitat del segle XVII les forces elèctriques estaven en procés d'observació i exploració, sobretot després de la invenció de l'ampolla de Leyden a la dècada dels 1740. Aquest artefacte, que avui en dia diríem que és un condensador, va permetre fer experiències amb més control i de més magnitud. Cal tenir present que ni tan sols la natura de l'electricitat estava clara. Uns pensaven que era una mena de fluid que creava atmosferes elèctriques al voltant de cossos carregats; d'altres, que era un fluid, però que interaccionava a distància, com la gravitació newtoniana. A més, hi havia també defensors de forces de repulsió tipus newtonià, però també qui apostava per una llei del tipus Boyle-Mariotte:

$$F \sim \frac{1}{r}$$

Coulomb, per descomptat, era favorable a la visió newtoniana i va presentar els seus experiments com a prova d'aquesta concepció. No serà fins la segona memòria on tractarà la qüestió de la dependència de la força amb la càrrega.

Aquest context i la lectura atenta de la memòria suggereixen que l'ordre de prioritats de l'enginyer i científic podria ser invers al que s'acostuma a explicar: Coulomb se serveix de la llei de repulsió de tipus newtonià per presentar la seva troballa: una balança de precisió que permetrà fer

7. Sobre la història de l'electricitat en els seus inicis, vegeu Heilbron (1979).

estudis quantitativs sistemàtics (Falconer, 2004). Aquesta versió encaixa una mica millor en la pròpia trajectòria de Coulomb, expert en mecànica i enginyeria de materials, però novell en el món de l'electricitat.

La rebuda a França va ser força bona. Allà s'estava produint el viratge cap a la nova física. A altres països l'acollida no va ser tan entusiasta, i inclús trobem il·lustres detractors com Alessandro Volta. A Alemanya, els intents de reproduir els seus experiments no van ser exitosos (Heering, 1994), i fins ben entrat el segle XIX la llei de Coulomb no va quedar establerta com a llei fonamental de l'electroestàtica, gràcies a refinaments experimentals i teòrics posteriors (com la teoria de Poisson del potencial elèctric o el teorema de Gauss). La rutilant física francesa del primer terç del segle va encimbellar Coulomb i el seu experiment com a pioners de la nova física. Va ser aleshores quan va esdevenir un símbol, en l'experiment que permetia fer palesa la llei newtoniana en esferes carregades. Segons Christine Blondel, però, les rèpliques que es van construir s'exposaven, però no es posaven en funcionament (Blondel i Dörries, 1994: 14-15).

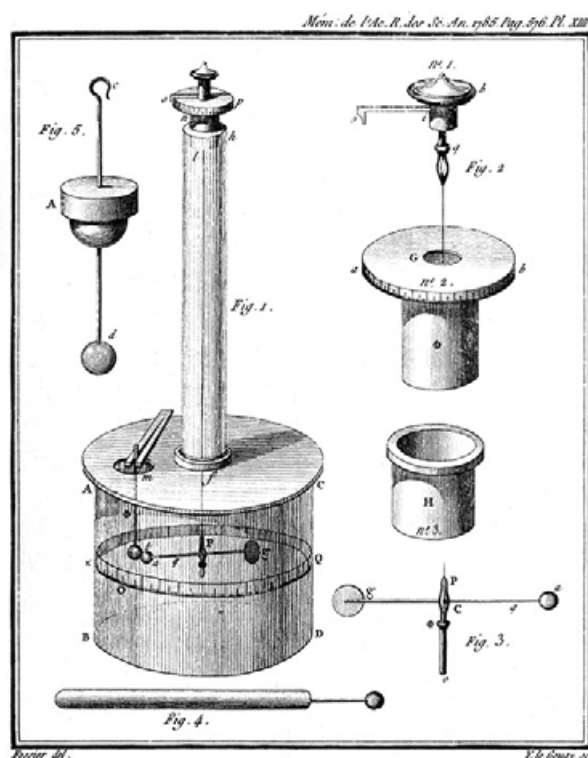


FIGURA 3. Gravats que apareix a la memòria de Coulomb (Coulomb, 1785).

FONT: Viquipèdia.

Replicació o restauració

Al programa del curs 1899-1900 del catedràtic de física de la Universitat de Barcelona Eduardo Lozano y Ponce de León hi trobem, a la secció dedicada a l'electricitat estàtica, lliçó 72 («Distribución y pérdida de la electricidad»), l'activitat: «Leyes de las atracciones y repulsiones eléctricas: Su demostración valiéndose de la balanza de Coulomb. Observaciones: fórmula» (Lozano y Ponce de León, 1899: 23). No queda clar si només es refereix a una demostració, però ens inclinem a pensar que, efectivament, la llei s'explicava a part, a la pissarra. La balança que s'hi

emprava ben bé podria ser la que actualment s'està a la vitrina. Si la nostra suposició fos certa, significaria que l'ús que se'n feia seguia la tradició francesa que s'havia instaurat a la primera meitat del segle XIX: mostrar qualitativament la llei fonamental de l'electroestàtica.

Amb aquesta dicotomia qualitatiu/quantitatiu ens vam topar quan vam escometre la tasca de restaurar la balança i mirar de replicar l'experiment original (García, 2023). Ja hem dit més amunt que les dimensions són més petites. Les esferes descrites per Coulomb eren de medul·la de saüc, iguals entre si i d'uns 8 mm de diàmetre. En l'aparell de la col·lecció l'esfera metàl·lica que es pot carregar des de fora del cilindre és més gran (uns 2 cm de diàmetre). Coulomb carregava les esferes servint-se d'un altre forat que hi havia a la tapa per on introduïa una pinça amb una bola carregada. A més, i com és lògic, se n'han perdut algunes parts originàries. La peça amb el contrapès i l'esfera carregada mòbil havia estat substituïda per una de decorativa inservible. Tampoc el fil era l'original. En canviar aquestes parts i seguir el procediment de Coulomb, de seguida vam comprovar que no seria trivial. El procés de càrrega (no explicat en la seva memòria) no permetia assolir efectes visibles o estables. Malgrat fer anar materials aïllants la càrrega no es mantenia, potser per la humitat. En posteriors arrencaments vam intentar eliminar aquesta humitat, i van millorar lleugerament els resultats. Inicialment, però, vam optar per fixar la nostra atenció en la torsió i fixar la càrrega amb un mètode aliè al de Coulomb: posar tot el muntatge a un cert potencial mitjançant una font de tensió, per assegurar així la constància de la quantitat de càrrega durant tot l'experiment. Una de les dificultats va ser trobar el punt d'equilibri, sense força elèctrica actuant, ja que es produïen oscil·lacions que trigaven molt a desaparèixer. Aquest problema és dels pocs que sí que comenta el propi Coulomb. Més endavant també vam afegir una gàbia de Faraday, en aquest cas seguint les recomanacions de Heering (per ell, la càrrega de l'experimentador és un dels aspectes que Coulomb no explicita i que el fan dubtar més de la credibilitat dels seus resultats); també així els resultats milloraven una mica. Però en cap cas vam obtenir una constatació evident de la llei newtoniana. En alguna sèrie de mesures vam obtenir exponents compatibles amb el quadrat, però no en d'altres.

Reflexions finals

La catalogació i restauració d'un instrument antic s'ha mostrat fructífera a diversos nivells. Els experiments que hem dut a terme amb la balança elèctrica ens han dut a distingir nítidament els aparells dissenyats per a mostrar un fenomen dels dissenyats per a mesurar-lo amb precisió (demostrar qualitativament versus replicar acuradament). També, dins de les nostres possibilitats, hem pogut comprovar la dificultat d'obtenir una confirmació robusta de la llei de Coulomb amb aquest muntatge (seguint a Heering, sensible però no precís). Tot això permet entendre des d'una nova perspectiva tant la memòria de Coulomb com els treballs historiogràfics que s'han fet sobre ella i el seu context, especialment pel que fa a la importància del coneixement tàcit, crucial al laboratori, i que sovint no forma part de les presentacions acadèmiques. Però també pel que fa a la importància dels prejudicis teòrics, que condicionen l'anàlisi i discussió de les dades obtingudes de manera empírica.

Referències bibliogràfiques

- BERTOMEU, José Ramón [et al.] (2011). «Los instrumentos científicos de los centros de enseñanza secundaria del siglo XIX en España». *Historia de la Educación*, 30, p. 167-193.
- BLONDEL, Christine; DÖRRIES, Matthias (1994). *Restating Coulomb*. Firenze: Leo S. Olschki.
- BRENNI, Paolo (2002). «La industria de precisión en el siglo XIX. Una panorámica de los instrumentos, los constructores y el mercado en diferentes contextos nacionales». A: BERTOMEU, José Ramón & GARCÍA BELMAR, Antonio (eds.). *Abriendo las cajas negras. Colección de instrumentos científicos de la Universitat de València*. València: Universitat de València, p. 53-17.
- (2006). «Dumotiez and Pixii: The transformation of French philosophical instruments». *Bulletin of the Scientific Instrument Society*, 59, p. 10-16.
- COULOMB, Charles A. (1785). «Premier mémoire sur l'électricité et le magnétisme». *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, p. 569-577.
- FALCONER, Isobel (2004). «Charles Augustin Coulomb and the fundamental law of electrostatics». *Metrologia*, 41, p. 107-114.
- GARCÍA, Júlia (2023). «Replication of Coulomb's torsion balance experiment» [Treball de fi de grau]. Barcelona: Universitat de Barcelona.
- GILLMOR, C. Stewart (1971). *Coulomb and the evolution of physics and engineering in eighteenth-century France*. Princeton: Princeton University Press.
- HEERING, Peter (1992). «On Coulomb's inverse square law». *American Journal of Physics*, 60, p. 988-994.
- HEERING, Peter (1994). «The replication of the torsion balance experiment. The inverse square law and its refutation by early 19th-century German physicists». A: BLONDEL, Christine; DÖRRIES, Matthias. *Restating Coulomb*. Firenze: Leo S. Olschki, p.47-66.
- HEILBRON, John (1979). «Electricity in the 16th and 17th century: a study of early modern physics». Berkeley: University of California Press.
- LOURENÇO, Marta C.; WILSON, Lydia (2013). «Scientific heritage: Reflections on its nature and new approaches to preservation». *Studies in History and Philosophy of Science*, 44, p. 744-753.
- LOZANO Y PONCE DE LEÓN, Eduardo (1899). *Programa de la asignatura Ampliación de la Física*. Barcelona: Hijos de Jaime Jepús impresores.
- LUSA MONFORTE, Guillermo (ed.) (2001). «La Escuela Industrial Barcelonesa. Inventario del material entregado por la Junta de Comercio al rector de la Universidad literaria de Barcelona el 9 de setiembre de 1851». *Documentos de la Escuela de Ingenieros Industriales de Barcelona*, 11, p. 69-93.

ESTUDI PER A LA RESTAURACIÓ DEL MOLÍ FARINER DE LA MOLA

EMMA SÁEZ PALMA; JOSEP MARIA PONS POBLET

ESCOLA TÈCNICA SUPERIOR D'ENGINYERIA INDUSTRIAL DE BARCELONA.
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Resum: A la Pobleta de Bellvei, un poble situat a l'inici de la Vall Fosca (Lleida), hi ha la Mola, un edifici que acull un molí fariner i una minicentral hidroelèctrica, propietat de la família Castells. La restauració completa de la Mola, que va començar l'any 2016 amb la recuperació de la minicentral hidroelèctrica, es completarà quan es torni a posar en funcionament el molí fariner i tot el sistema de transport de gra que conté. L'objectiu d'aquest treball és estudiar el sistema de transmissió del molí, descrivint els elements que cal reconstruir i estimant el cost de la restauració. En primer lloc, s'ha realitzat un estudi fotogràfic de l'estat actual, seguit d'una recerca d'opcions de restauració per als elements de fusta del molí, amb la intenció de conservar tants elements originals com sigui possible. Aquest treball no pren decisions definitives sobre la restauració, sinó que ofereix propostes i suggeriments perquè la propietària pugui prendre la decisió més adequada.

Paraules clau: molí fariner, engranatges, La Mola, transmissions, minicentrals.

Study for the restoration of the flour mill of La Mola

Summary: Flour mills have been a way of obtaining flour from wheat using the natural resources from the area where they are located. In La Pobleta de Bellvei, a village located at the beginning of la Vall Fosca (Lleida), there is La Mola, a building that houses a flour mill and a mini-hydroelectric power station, owned by Castells family. The complete restoration of La Mola, which began the year 2016 with the recovery of the mini-hydroelectric power station, will be finished when the flour mill and the entire grain transport system that it contains are put back into operation. The goal of this work is to study the transmission system of the mill, outlining the elements that need to be reconstructed and estimating the cost of the restoration. First of all, a photographic study of the current state has been done, followed by research of restoration options for the wooden elements of the mill, aiming to preserve as many original elements as possible. This work does not make definitive decisions for restoration, instead, it offers proposals and suggestions so that the owner can make the most appropriate decision.

Keywords: flour mill, gear, La Mola, transmissions, mini-hydroelectric plant.

Introducció

Els molins fariners han permès obtenir farina a partir dels cereals, utilitzant aquells recursos naturals propis de la zona on es troben localitzats (Aguirre, 1998), (Izaga, 2010). A la Pobleta de Bellveí, un poble situat a l'inici de la Vall Fosca (Lleida), s'hi troba la Mola, un edifici que conté un molí fariner i una mini-central hidroelèctrica propietat de la família Castells. La restauració total de la Mola, que va començar l'any 2016 amb la recuperació de la mini-central hidroelèctrica, es trobarà completa quan el molí fariner, i tot el sistema de transport del blat que conté, es torni a posar en funcionament. L'objectiu d'aquesta comunicació és presentar l'estudi del sistema de transmissió del moviment del molí, perfilant els elements que s'han de reconstruir. Primer s'ha fet un estudi de l'estat actual mitjançant fotografies, seguidament s'han buscat opcions per a la restauració dels elements de fusta que conté el molí (Carbonell, 2005), intentant conservar el major nombre d'elements originals i, en cas de no poder ser, fer el possible per mantenir l'aspecte i el material de què estan fets. En aquest treball no es prenen decisions definitives per a la restauració, sinó que es fan propostes i suggeriments per tal que la propietària prengui la decisió que trobi més oportuna. Es presenta l'estudi de la part inferior del molí i el perfil de les dents de fusta que contenen alguns dels engranatges. També s'ha fet un estudi del funcionament del sistema graduador i aixecador dels molins de la Mola, que, degut al seu tren d'engranatges, és peculiar i diferent del de la majoria de molins fariners existents (Roteta, 2016).

Aquest article ha estat fruit del treball de final de grau de la titulació *Grau en Tecnologies Industrials* de la Universitat Politècnica de Catalunya (UPC), defensat a l'Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona (ETSEIB) per part de l'autora de la comunicació.

La història de la Mola

L'any 1882, any en què la família Castells compra la Mola (Castells, 2006), es signa també la concessió d'aigua que estableix que poden captar-se 900 litres/segon, ampliables fins a 2.500 litres/segon, del riu Flamisell (vegeu la fig.1). Aquesta presa d'aigua es fa mitjançant una presa natural situada un quilòmetre aigües amunt de la instal·lació.

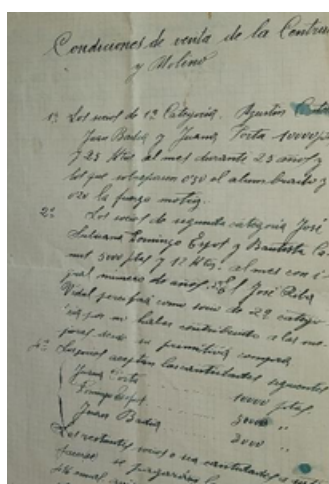


FIGURA 1. Document de compravenda de la Mola.

FONT: Elaboració pròpia. Fons personals



FIGURA 2. Antiga fotografia de la Mola; al darrere la Pobleta de Bellveí.

FONT: Elaboració pròpia. Fons personals

S'ha de tenir en compte que no es coneixen les dades ni de la data de construcció, ni de la primera posada en marxa del molí fariner, i no sabem, per tant, quants anys va funcionar el molí o si va fer-ho abans de la concessió d'aigua encara vigent. Sí que es coneixen els inicis de la minicentral hidroelèctrica i les millores fetes al molí fariner en anys posteriors, un cop la Mola és adquirida per la família Castells. Aquesta informació és coneguda principalment gràcies a fonts orals, històries explicades de pares a fills, i no pas per documentació escrita. L'any 1908 s'instal·la la primera dinamo connectada al sistema d'engranatges del molí fariner. Aquesta, en un principi, únicament produeix llum per a la família, i augmenta progressivament la seva producció fins a cobrir la llum de diversos pobles de la Vall Fosca, inclosa la Pobleta de Bellveí. La primera factura de llum de la qual es té constància data del 1911. Tres anys més tard, inicia el seu funcionament la central de Capdella (propietat de l'empresa FECSA). L'electricitat d'aquesta nova central no abastirà la Vall Fosca fins al cap de molts anys. Durant tot aquest temps, la font d'electricitat d'aquests pobles segueix sent la Mola. Degut a l'augment de la demanda, l'any 1932 s'afegeix una turbina a la Mola per tal que aquesta pugui produir electricitat independentment del sistema del molí, s'amplia el salt d'aigua i se'n fa una obertura única per a la nova turbina, alhora es construeix també una petita edificació que alberga aquest sistema (Font-Agustí, 2000) (vegeu la fig. 2).

Abans de la Guerra Civil, la part del molí fariner estava formada per dos molins que produïen farina principalment per al bestiar. Durant els anys 40, uns operaris especialistes en molins del País Basc arriben a la Pobleta de Bellveí. Instal·len un nou sistema al molí per tal que aquest pugui produir farina blanca i uns mecanismes de transport del blat, cereals i farina que faciliten el seu moviment dins la Mola (vegeu la fig. 3).



FIGURA 3. Imatge general de l'interior del molí.

FONT: Elaboració pròpia. Fons personals

A partir d'aquest moment poden produir-se fins a vuit tipus diferents de farina. Això implica, per tant, vuit processos de producció diferents segons la farina desitjada. És també durant aquesta època que es construeix l'edifici actual de tres plantes per al molí fariner amb una sala annexa a la planta baixa per a la minicentral. La Mola adquireix el seu aspecte actual. Trenta anys després d'aquesta implementació, el molí atura el seu funcionament. Als anys 70 hi ha una gran onada d'immigració cap a Barcelona, fet que implica una despoblació de les zones rurals, inclosa la Vall Fosca. Abans d'aquest fet, a la vall es cultivaven cereals, i els agricultors de la zona anaven fins a la Mola de la Pobleta de Bellveí, o la situada a Gerri de la Sal, a moldre els cereals o el blat. Cal tenir present que gran part de la farina que s'obtenia era per a l'autoconsum. Amb la despoblació de la zona, els camps de cultiu de cereals es converteixen en prats d'herba per a la pastura del bestiar, això provoca que els molins deixin de ser necessaris per als seus habitants. És aleshores que els seus propietaris decideixen aturar-ne el funcionament. Durant els deu anys següents, la minicentral hidroelèctrica de la Mola segueix funcionant, però únicament per a l'autoconsum familiar. A l'any 2001 s'atura definitivament, i no és fins a l'any 2016 que la propietària actual de la Mola decideix posar de nou en marxa la minicentral hidroelèctrica, mantenint sempre que sigui possible els elements i aspecte original d'aquesta¹ (vegeu la fig. 4).



FIGURA 4. Història de la Mola.

FONT: Elaboració pròpia. Fons personals

1. Informació directa de la família Jordana

Parts de la Mola

Funcionament

El primer pas perquè la Mola es posi en funcionament és desviar l'aigua del riu cap al canal a través del bramador, fins a arribar a la bassa. Per tal que l'aigua caigui a la turbina, se n'ha d'obrir el pas mitjançant el pany del canal. Un cop l'aigua cau sobre del rodet o turbina, aquesta gira i transmet el moviment a través de l'arbre fins a la pedra superior de les moles (Dalfó, 2013).

Les pedres dels molins tenen unes característiques essencials per al seu funcionament. La mola volandera i la sotana són dues pedres amb algunes diferències en el seu disseny. La mola volandera té un forat central més gran que el de la sotana, per tal que hi càpiga la nadella, que permet que giri la pedra volandera, mentre que el forat de la sotana ha de contenir un coixinet de fusta per tal d'acomodar i deixar passar el collferro. Malgrat aquesta diferència, les dues pedres són iguals en la resta de característiques. És crucial que les dues pedres tinguin el mateix diàmetre per tal que la farina pugui sortir sense obstacles. D'aquesta manera també s'evita la formació d'un llavi, que és un rengló que apareix quan una pedra desgasta l'altra. Una altra característica important és el picat de les pedres. Ambdues pedres presenten a la seva superfície interior, la que entra en contacte amb l'altra pedra, unes estries idèntiques però de sentits oposats, amb la fi de trencar i polvoritzar el gra. El picat consisteix en unes quatre a sis ratlles o canals principals que cobreixen tota la superfície de la pedra, des del centre fins a la vora. Aquests canals permeten que la farina s'expulsi cap a l'exterior aprofitant la força centrífuga generada pel gir de la mola volandera. A més, hi ha unes altres ratlles més fines anomenades «ventalls» que guien la farina cap als canals principals. Per tal que les moles no es sobrecarreguin de blat i puguin moldre'l correctament, és necessari un sistema que reguli la quantitat de blat que cau des de la tremuja fins a la filloseta. Aquest sistema graduador varia segons el molí. Per obtenir una bona molta, tenir en compte el control del blat que cau de la tremuja no és suficient; és essencial que la separació que hi hagi entre les moles sigui adequada, ja que segons la distància d'aquestes, s'obtindrà una farina de més o menys qualitat, més fina o més grossa. Per tal de separar les moles, l'alçador juga un paper primordial. Aquest, en ser manipulat, fa moure el banc que l'aixeca —si el que es vol és separar les moles, funció anomenada «alleujar»—, i baixant-lo —si el que es busca és una farina més fina, anomenat també «assentar les moles»—. És de vital importància que l'arbre es mantingui vertical perquè les pedres no quedin descompensades. El dau permet que l'agulla es mogui dins de la seva concavitat, per mantenir així l'eix de l'arbre sempre vertical. Sense això, correríem el risc que la mola volandera s'aixequés més d'un costat que de l'altre fent que les pedres i tot el sistema tingués un major risc de ruptura. D'aquesta manera, el funcionament no seria l'òptim. Un cop s'ha molt el gra introduït a la tremuja i la farina vessa d'entre les moles, aquesta cau a la farinera i és preparada per ser posada en sacs o bosses (Fernández Bonnemaïson, 2003).

Moviment de transmissió

La Mola té un sistema molt gran i complex de transmissió de moviment. En aquest article únicament s'exposarà el corresponent al pis inferior. En aquest pis hi ha la turbina; per tant, és on s'inicia el moviment que farà moure les moles (vegeu la fig. 5 i 6). Aquest sistema està format per quatre parts diferenciades:

1. La turbina i la primera dinamo que va contenir la Mola.
2. Els engranatges dels dos molins.
3. Dues politges que fan moure una màquina situada a la planta superior. Aquesta màquina es creu que servia per filtrar el blat, però no hi ha suficient documentació per confirmar-ho.
4. Una politja encarregada de transmetre el moviment a la planta de sobre. Aquesta mou un altre eix que és l'encarregat de fer arribar el moviment a la resta de màquines de la Mola.

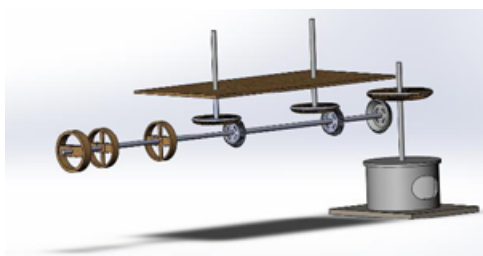


FIGURA 5. SolidWorks de la planta inferior. Vista des de les politges.
FONT: Elaboració pròpia. Fons personals.

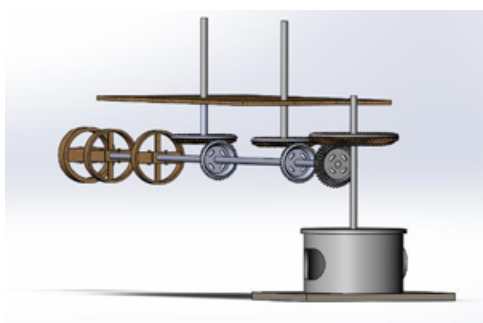


FIGURA 6. SolidWorks de la planta inferior. Vista des de la turbina.
FONT: Elaboració pròpia. Fons personals.

Com pot observar-se en les imatges, la part interior de la turbina no s'ha pogut perfilar. Això és degut a la impossibilitat de desmuntar la caixa metàl·lica que conté el rodet. La caixa té un petit forat per on s'evacua l'aigua que fa girar el rodet (vegeu la fig. 7), és per on s'ha intentat observar la turbina. El pas dels anys ha emplenat la caixa de fulles, branques, pedres, etc., cosa que impedeix poder veure clarament la forma del rodet. Tot i això, s'observa que és metàl·lic (vegeu la fig. 8).



FIGURA 7. Caixa que conté el rodet.
FONT: Elaboració pròpia. Fons personals.



FIGURA 8. Interior de la caixa.

FONT: Elaboració pròpia. Fons personals.

Com a tots els complexos moliners, existeix la possibilitat de poder utilitzar un, dos o cap dels molins. En la gran majoria, cada una de les moles té el seu propi rodet. Per tant, té la seva pròpia aportació d'aigua i presenta també un sistema per regular la separació de les pedres. A la Mola, per tal de regular si un molí funciona o no, s'han d'engranar o desengranar els engranatges corresponents. Per fer-ho s'utilitza un sistema de palanques (vegeu la fig. 9) que cal aixecar o baixar si es vol o no utilitzar-lo. També consta d'una rodeta (vegeu fig. la 10) que regula l'alçada dels engranatges per tal de modificar la separació entre les pedres.



FIGURA 9. Sistema aixecador de les moles. Maneta.

FONT: Elaboració pròpia. Fons personals.



FIGURA 10. Sistema regulador d'alçada de les moles. Rodet.

FONT: Elaboració pròpia. Fons personals.

El sistema graduador de la Mola (vegeu la fig. 11) és molt diferent dels que pot trobar-se a altres molins. Habitualment, el graduador funciona mitjançant un cop o moviment a la sortida de la tremuja, que es produeix gràcies a la rotació de les pedres. Al final de la tremuja dels molins de la Mola, s'hi ha col·locat un embut que apunta les pedres i realitza la funció de graduador. La boca de l'embut es troba a un parell de centímetres de la pedra volandera. Al centre de la pedra volandera, i per tant situat al final de l'arbre, hi ha un tros de pedra circular plana, és allà sobre on hi cau el blat. La seva funció de graduador es realitza gràcies a la rotació d'aquesta pedra plana que fa moure el blat de mica en mica cap al forat que hi ha entre aquesta pedra i la mola volandera (vegeu fig. la 12). A mesura que el blat va caient de la tremuja, surt blat nou que cau sobre la pedra plana. L'embut pot regular la seva separació per tal de deixar caure més o menys blat amb un mecanisme que conté una rodeta per regular-lo mil·limètricament (vegeu fig. la 13 i 14).



FIGURA 11. Graduador de la Mola. L'embut.

FONT: Elaboració pròpia. Fons personals.



FIGURA 12. Resultat de l'experiment realitzat.
FONT: Elaboració pròpia. Fons personals.



FIGURA 13. Regulador de la separació de l'embut.
FONT: Elaboració pròpia. Fons personals.



FIGURA 14. Graduador de la Mola.
FONT: Elaboració pròpia. Fons personals.

Les dents dels engranatges

Podem diferenciar les dents dels engranatges en dos tipus, les corresponents als engranatges verticals, que són de ferro, i les dels engranatges horitzontals, fetes de fusta (vegeu la fig. 15). L'antifricció s'obté mitjançant greix animal, es compensen així els esforços radials (Castells i Jordana, 2016). Quan la Mola es trobava en funcionament, les dents de fusta s'havien d'anar comprovant regularment per tal d'evitar una ruptura inesperada i, quan era necessari, canviar-les. Tots dos molins tenen el mateix sistema d'engrenatges, amb un engranatge de fusta de 68 dents (vegeu fig. la 16). Per assegurar que el perfil de les dents és el mateix en tots dos molins, s'extreu de cada un d'aquests engranatges una dent. Les dues dents són iguals amb unes toleràncies d'un mil·límetre. Un cop comprovat que els dos molins tenen els mateixos mecanismes, es decideix fer un únic perfil de dents per als dos engranatges (vegeu fig. la 17). L'engrenatge de la turbina (vegeu fig. la 18) té 80 dents de fusta i es realitza el perfil d'una d'elles (vegeu fig. la 19).



FIGURA 15. Tascons extrets dels engranatges.

FONT: Elaboració pròpia. Fons personals.



FIGURA 16. Dent extreta del molí.

FONT: Elaboració pròpia. Fons personals.

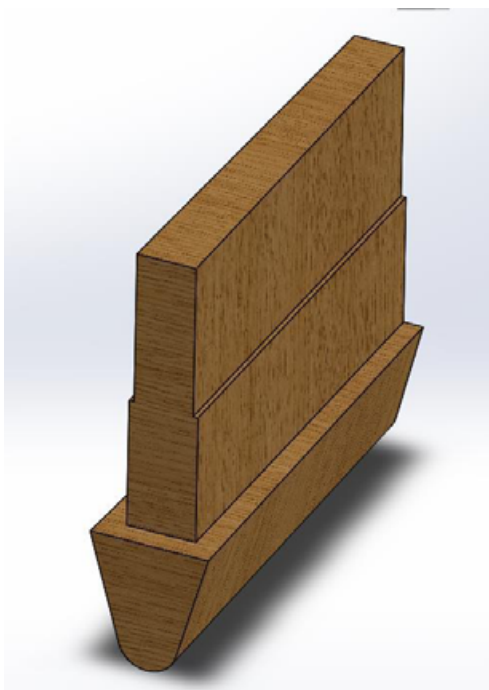


FIGURA 17. SolidWorks de les dents del molí.
FONT: Elaboració pròpia. Fons personals.



FIGURA 18. Dent extreta de la turbina.
FONT: Elaboració pròpia. Fons personals.

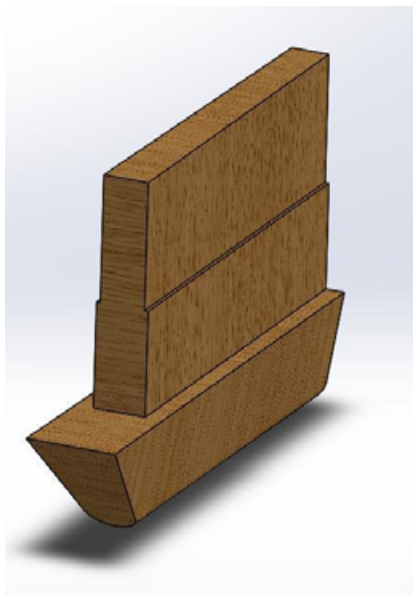


FIGURA 19. SolidWorks de la dent de la turbina.

FONT: Elaboració pròpia. Fons personals

Quan es van lliurar al fuster les dents originals de fusta, va apuntar que, a diferència del que diu el llibre *Contracorrent*, les dents són de fusta de roure (*Quercus*) o castanyer (*Castanea Sativa*), en comptes de fusta d'alzina. Com que totes dues fustes són molt similars, s'ha hagut de tenir en compte diverses coses a l'hora de fer un estudi acurat. Tot i que el castanyer ha estat una fusta molt utilitzada a l'hora de fer peces i mobles, actualment la restauració no podria realitzar-se amb aquest material, ja que és una espècie protegida i està prohibit el seu ús en fusteria (Gamez, 2015). També cal tenir en compte la zona en què es troba la Mola. Els boscos de la Vall Fosca no tenen castanyers, però sí que s'hi troben rouredes. És per això que s'ha suposat que les dents actuals eren fetes de roure, per mantenir el mateix tipus de fusta a l'actualitat. Una complicació a l'hora de fabricar les dents és el sentit de les vetes de la fusta. Les vetes es troben en el sentit vertical de la peça, així ofereixen una major resistència a la rotació i a la força horitzontal que es produeix. Per tal d'aconseguir la forma desitjada de la dent, seria molt més ràpid i fàcil treballar si les vetes es trobessin en sentit horitzontal respecte a les dents.

Politges de fusta

Les politges de fusta que es troben a la planta estudiada es poden classificar, com s'ha mencionat anteriorment, en dos tipus. Les dues primeres, iguals entre elles i a partir d'ara anomenades tipus 1 (vegeu la fig. 20), són les connectades a una màquina, suposadament de filtratge de blat, mentre que l'última politja d'aquest sistema és diferent i, per tant, referenciada com a tipus 2 (vegeu la fig. 21). Per a les politges s'han contemplat dos mètodes a seguir: o aplicar un tractament per tal d'eliminar els corcs i, per tant, poder conservar les actuals, o bé fer-les de nou igual com s'ha fet amb les dents dels engranatges, tal com es presenta a continuació.



FIGURA 20. Politja tipus 1.

FONT: Elaboració pròpia. Fons personals.



FIGURA 21. Politja tipus 2.

FONT: Elaboració pròpia. Fons personals.

Restauració mitjançant tractament anticorcs

En aquest cas s'han buscat opcions per tal de poder mantenir les politges existents, tractant-les per tal d'eliminar tots els corcs que puguin tenir i protegint-les amb un tractament preventiu. La valoració dels experts en plagues ha estat que el tipus de corc que s'observa en les peces és corc petit (*anobium punctatum*) i, per tant, el tractament que ofereixen cadascuna d'elles és per tal d'eliminar-los i protegir la fusta d'aquesta plaga. Aquest tipus de corc ataca les capes exteriors de la fusta i ocasiona danys estètics greus, però sense afectar-la a nivell estructural, fet que ens permet intentar tractar-les en comptes d'haver de substituir-les directament. El tractament valorat per les

politges és un tractament superficial contra insectes xilòfags, que assoleix el grau de protecció NP2 d'acord amb el Codi Tècnic d'Edificació (apartat CTE SE-M, Seguridad Estructural Madera). Per donar garantia del tractament superficial és imprescindible que la fusta es trobi amb els porus oberts, lliure de pintures, ceres, olis... La composició del producte per fer el tractament és nociva per a la inhalació i la ingestió. Per tal de prevenir qualsevol tipus de perill relacionat amb l'aplicació d'aquest tractament, caldrà deixar passar 24 hores abans d'accedir de nou al molí per tal de ventilar l'espai, i 7 dies més abans de poder tornar a fer-ne ús de manera habitual.²

Substitució de les politges

S'ha consultat el fuster sobre els tractaments per eliminar corcs i, segons la seva experiència, afirma que no existeix un tractament 100 % efectiu per eliminar-los, i els que són més efectius són complicats i impliquen molt temps. A més a més, comenta que un cop la fusta ha estat menjada pels corcs és més difícil de predir el seu comportament, degut als forats que deixen, tot i que aquests s'emplenin amb altres materials. Per tant, una bona solució seria procedir a la seva substitució. Ara bé, la recomanació, tenint en compte tot el que s'ha vist anteriorment, seria mantenir les politges ja existents, no pas per motius econòmics o ambientals, sinó perquè, tractant-se d'una restauració, la idea és mantenir, en la mesura que pugui, els elements originals del molí, igual que va fer-se en restaurar-se la turbina de la minicentral hidroelèctrica. També cal tenir en compte que, si el tractament anticorcs no fos efectiu, sempre s'està a temps de canviar les politges per unes de noves.

Conclusions

El primer objectiu de tots era reconstruir el procés que seguia el blat en arribar a la Mola. Això no ha estat possible per la complexitat del sistema de transport de blat i la maquinària que aquest implica. Tot i haver pogut esbrinar part del trajecte intern que realitzava el blat i la farina un cop molta, no ha estat possible fer-ne l'estudi. Com que no es tenia documentació gràfica ni fonts orals que expliquin el funcionament del sistema, el primer objectiu era el més complex de tots. No és podrà saber amb certesa si les suposicions fetes són correctes fins al moment de posada en marxa del molí.

El segon objectiu era dissenyar el sistema dels mecanismes de la mola. En aquest treball només s'ha pogut realitzar amb èxit el funcionament del sistema de la planta inferior. Actualment, segueixo treballant en l'estudi de la Mola.

El tercer objectiu era dissenyar i construir les dents dels engranatges de fusta, això s'ha assolit parcialment. La dificultat per trobar un fuster que pogués fer les peces ha estat molt gran. Com s'ha mencionat anteriorment, aquestes peces són molt complicades de realitzar i, tot i que el fuster creu que podria fer-les, menciona que això no implica que finalment se'n sortís o que la feina tingués el resultat esperat. Les politges i els engranatges de la planta inferior s'han perfilat per complet, l'únic que no s'ha estudiat ha estat el rodet, del qual, tot i haver definit que és metàl·lic, no s'ha pogut veure la forma exacta. Seria interessant per al futur poder obrir la caixa que el conté, per netejar la turbina i poder documentar-la.

Tot i que no constava en els objectius del treball, també s'ha estudiat el sistema graduador, que és únic en cada molí visitat, i el sistema aixecador dels molins, que, degut a la peculiaritat de ser un sistema d'engranatges, és diferent de l'observat en altres molins on fan funcionar cada molí amb un rodet diferent.

2. Informació obtinguda directament de l'empresa Umbralía.

Referències bibliogràfiques

AGUIRRE SORONDO, Antxon (1988). *Tratado de Molinología (Los molinos de Guipúzcoa)*. Donostia: Eusko Ikaskuntza.

CARBONELL QUETGLAS, Montserrat (2005). «Proposta de protocol per a la restauració de molins». A: *IV Congrés Internacional de Molinología*. Palma: Consell de Mallorca - Departament de Medi Ambient i Natura, 2 vols., vol. 2, p. 275-293.

CASTELLS I JORDANA, Susanna (2016). «La Mola. Mini central hidroeléctrica y molino de harina en la Pobleta de Bellvé (Lleida)». A: SANZ ELORZA, M.; VALDÉS DEL FRESNO, A.; IZAGA REINER, J. M. (Ed.). *Actas X Congreso Internacional de Molinología*. Segovia: Asociación X Congreso Internacional de Molinología, p. 357-367.

DALFÓ REVUELTO, Ramon (2013). *El patrimoni de l'aigua a Alfarràs (el Segrià, Lleida)*. Treball de Fi de Màster en Patrimoni cultural i desenvolupament local de la Universitat de Lleida. Disponible en: <https://repositori.udl.cat/server/api/core/bitstreams/f543a9bd-fb1c-482f-8d85-c525c8891bc4/content>.

FERNÁNDEZ BONNEMAISON, Juan (2003). «Rehabilitación del molino de Inca». A: *IV Congrés Internacional de Molinología*. Palma: Consell de Mallorca - Departament de Medi Ambient i Natura, 2 vols., vol. 2, p. 241-264.

GAMEZ, M. J. (2015). «Objetivos y metas de desarrollo sostenible». Desarrollo Sostenible. <https://www.un.org/sustainabledevelopment/es/objetivos-de-desarrollo-sostenible/>

FONT-AGUSTÍ, Jordi (2000). *Contracorrent* (1a ed.). ECSA.

ROTETA NAZABAL, Alex (2016). «Molino Yurrita: Patrimonio natural y edificado». A: SANZ ELORZA, M.; VALDÉS DEL FRESNO, A.; IZAGA REINER, J. M. (Ed.). *Actas X Congreso Internacional de Molinología*. Segovia: Asociación X Congreso Internacional de Molinología, p. 149-157.

Bibliografia complementària

Dels quatre llibres d'actes de congressos de molinologia citats a continuació, són molts els articles que han estat de gran ajuda per ampliar el coneixement en l'àmbit. D'aquests articles, n'hi ha que han estat d'especial interès per al treball, d'aquí que es trobin citats anteriorment, sense evitar, però, que la resta d'articles que es presenten en aquestes actes tinguin un gran valor i interès per comprendre i fer possible aquest treball.

Consell de Mallorca. Departament de Cultura, Patrimoni i Política Lingüística (Ed.). (2018). *XI Congrés internacional de molinologia. Memòria, arquitectura, enginyeria i futur*.

Consell de Mallorca. Departament de Medi Ambient i Natura (Ed.). (2003a). *IV Congrés Internacional de Molinología: Vol. I*.

Consell de Mallorca. Departament de Medi Ambient i Natura (Ed.). (2003b). *IV Congrés Internacional de Molinología: Vol. II*.

Asociación X Congreso Internacional de Molinología. (2016). *X Congreso internacional de Molinología Segovia—2016—Turismo cultural* (M. Sanz Elorza, A. Valdés del Fresno, & J. M. Izaga Reiner, Ed.). (2016). *X Congreso internacional de Molinología Segovia—2016—Turismo cultural* (M. Sanz Elorza, A. Valdés del Fresno, & J. M. Izaga Reiner, Ed.).

RESOLUCIÓ DE TRIANGLES AMB EL SUPORT DEL SECTOR ANGLÈS: ALGUNES REFLEXIONS SOBRE LA SEVA IMPLEMENTACIÓ A L'AULA DE MATEMÀTIQUES

MÒNICA BLANCO

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Resum: El sector anglès és un instrument matemàtic, utilitzat al segle XVIII per a resoldre triangles. L'anàlisi contextualitzada d'aquest instrument matemàtic es pot incorporar com a recurs explícit a l'aula per millorar la comprensió de conceptes trigonomètrics. Aquesta contribució se centra en el disseny d'una activitat d'aula per resoldre triangles des d'una perspectiva històrica, basada en la descripció i l'ús del sector anglès, inclosa en l'obra d'Edmund Stone (ca. 1695-1768), The Construction and Principal Uses of Mathematical Instruments (1723).

Paraules clau: instruments matemàtics, resolució de triangles, Edmund Stone.

Triangle resolution Using the English Sector: Some Considerations Regarding its implementation in the Mathematics Classroom

Summary: The English sector is a mathematical instrument that was used in the 18th century for solving triangles. The contextualized analysis of this mathematical instrument can be incorporated as an explicit resource in the classroom to enhance the understanding of trigonometric concepts. This contribution focuses on the design of a classroom activity for solving triangles from a historical perspective, based on the description and use of the English sector, included in the work of Edmund Stone (ca. 1695-1768), The Construction and Principal Uses of Mathematical Instruments (1723).

Keywords: mathematical instruments, solution of triangles, Edmund Stone.

Introducció¹

La resolució de triangles rectangles apareix en el currículum de matemàtiques de 4t d'ESO, dins del bloc «Mesurament»,² i la de triangles en general en el currículum de 1r de batxillerat, dins del sentit de la mesura del bloc «Geometria».³ En general, s'estudia com utilitzar les raons trigonomètriques i les seves relacions per determinar longituds i mesures angulars en problemes de resolució de triangles, que es poden modelitzar amb triangles. A més a més, s'hi inclou l'estudi de l'origen i ús de la trigonometria al llarg de la història. La utilització de la història de les matemàtiques com a recurs explícit a l'aula permet millorar l'assoliment de conceptes matemàtics (Guevara Casanova i Massa-Esteve, 2009; Van Gulik-Gulikers, Krüger i Van Maanen, 2020; Massa-Esteve, 2003). Es poden dissenyar i experimentar activitats d'aula que ajudin a entendre millor els conceptes matemàtics, i que contribueixin a millorar la formació integral dels alumnes, amb un coneixement addicional del context social i científic dels períodes involucrats. Els treballs del grup d'Història de les Matemàtiques d'ABEAM sobre el naixement i el desenvolupament històric de la trigonometria, a partir de l'anàlisi contextualitzada de textos històrics, il·lustren aquest enfocament en el cas de conceptes trigonomètrics.⁴

D'altra banda, Greenwald & Thomley (2013) afirmen que la connexió explícita entre eines, problemes, persones i història pot promoure l'ensenyament i aprenentatge de les matemàtiques. Actualment trobem enfocaments que promouen la utilització d'instruments antics a l'aula de matemàtiques moderna. Bartolini Bussi defensa la utilització d'instruments antics a l'aula moderna, tant com a experiència física, com a forma alternativa de desenvolupar la comprensió de conceptes matemàtics específics (Nagaoka *et al.*, 2000: 343-350). En el cas de la trigonometria, Ackerberg-Hastings (2007) presenta com l'estudi d'un instrument històric a l'aula de matemàtiques (el transportador rectangular) pot servir per introduir el procés abstracte per dibuixar angles.

El sector anglès és un instrument matemàtic, utilitzat especialment en el segle XVIII, una de les aplicacions del qual és la resolució de triangles. Es pot incorporar l'anàlisi contextualitzada d'aquest instrument matemàtic com a recurs explícit a l'aula per millorar l'assoliment de conceptes trigonomètrics. Aquesta contribució se centra en el disseny d'una activitat d'aula basada en la descripció i l'ús del sector anglès, per treballar la resolució de triangles a l'aula de matemàtiques des d'una perspectiva històrica, a partir de la descripció que se'n troba a l'obra d'Edmund Stone (ca. 1695-1768) sobre instruments matemàtics.⁵

1. Aquest treball s'inclou en el projecte PID2020-113702RB-I00.

2. <https://xtec.gencat.cat/web/.content/curriculum/eso/curriculum-175-2022/Matematiques.pdf>

3. <https://xtec.gencat.cat/web/.content/curriculum/batxillerat/curriculum-171-2022/materies-obligatories-de-modalitat/Matematiques.pdf>

4. Vegeu, per exemple, Guevara Casanova, Romero Vallhonesta i Massa-Esteve, 2008; Romero Vallhonesta *et al.*, 2009 i Blanco, 2015.

5. El meu interès per la vida i l'obra d'Edmund Stone va començar mentre estudiava els treballs de Thomas Simpson (1710-1761) sobre el mètode de fluxions, de 1737 i 1750. Per entendre les diferències entre ambdues obres, calia explorar la influència matemàtica d'altres autors sobre Simpson. Entre d'altres, vaig examinar el *Method of Fluxions both Direct and Inverse* (1730) de Stone. La part «directa» era una traducció de l'*Analyse des infiniment petits* de L'Hospital (1696), mentre que la part «inversa» es basava en l'*Harmonia Mensurarum* de Cotes (1722). El *Method of Fluxions* de Stone va ser un dels primers llibres sobre fluxions que Simpson va llegir. A més del *Method of Fluxions*, Stone va publicar una gran quantitat de treballs matemàtics, quantitat que sobta més encara en tractar-se del fill autodidacta del jardiner de John Campbell (1680-1743), duc d'Argyll i de Greenwich. Vegeu Blanco (2015).

El sector anglès

El 1723 Edmund Stone va publicar *The Construction and Principal Uses of Mathematical Instruments*, un dels primers manuals generals en anglès sobre instruments matemàtics. Es tracta essencialment d'una traducció del *Traité de la construction et des principaux usages des instrumens de mathématique* (1709) de Nicolas Bion (1652-1733). En el pròleg del traductor, Stone defineix les matemàtiques com a ciència, pel que fa a la teoria, i com a art, pel que fa a la pràctica. Els instruments matemàtics connecten aquests dos aspectes de les matemàtiques. Atès que el coneixement dels instruments matemàtics porta al coneixement de les matemàtiques pràctiques, el seu estudi pot considerar-se, segons Stone, com una de les branques de coneixement més útils i, per tant, cal fomentar-ne l'ús.

Al final de la seva traducció, Stone annexa diversos instruments, no presents al llibre de Bion, en particular aquells instruments inventats o millorats pels anglesos. Així, per exemple, després de la traducció del llibre II sobre la construcció i usos del compàs de proporció, o «sector francès», Stone afegeix un annex sobre la construcció i usos del «sector anglès». El compàs de proporció, o sector en la seva versió anglesa, és un instrument matemàtic format per dos braços de la mateixa longitud, articulats i units en un extrem. Ambdós costats dels braços presenten gravades diverses escales amb diferents mesures que resulten útils per resoldre problemes relacionats amb la proporció.⁶ La diferència principal entre les dues versions de l'instrument és la diversitat i quantitat de línies traçades a ambdós costats de l'instrument (vegeu fig. la 1).⁷ Així, segons el llibre de Bion, les línies del «sector francès» són: línies de parts iguals, de plans, de polígons, de cordes, de sòlids, de metalls. En canvi, les línies principals sobre el «sector anglès» segons Stone són les línies de parts iguals, de cordes, de sinus, de tangents, de secants, de polígons, sinus artificials, tangents artificials i l'escala de Gunter.

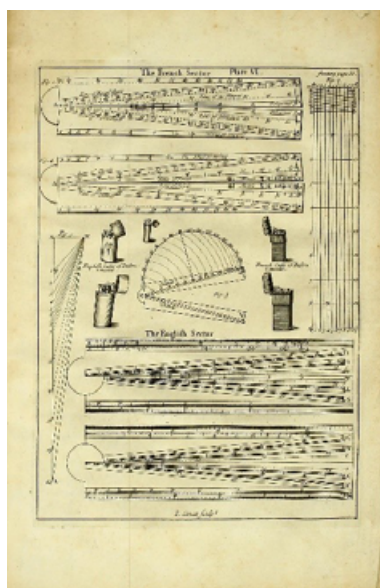


FIGURA 1. El sector francès i anglès, segons la làmina VI de Stone (1723).

FONT: Stone, 1723: làmina VI.

6. Sobre la història d'aquest instrument, es pot consultar Frémontier-Murphy (2013) i Navarro Loidi (2007).

7. Totes les figures del llibre de Stone (1723) corresponen a la versió digitalitzada per Internet Archive, 2012, disponible a <http://archive.org/details/constructionprin00bion>

Les línies traçades a ambdós costats del sector (per exemple, a , b) s'anomenen *laterals* (vegeu la fig. 2). Les línies que van d'un braç del sector a l'altre, en divisions iguals des del centre (per exemple, x , y), s'anomenen *paral·leles*. El funcionament del sector es basa en la proposició 4 del llibre VI dels *Elements* d'Euclides, centrada en la semblança de triangles: el segment a és al segment x , com el segment b és al segment y . Amb el suport d'un parell de compassos, es pot fixar la distància entre dos termes sobre una mateixa línia lateral, així com determinar la longitud de línies paral·leles.

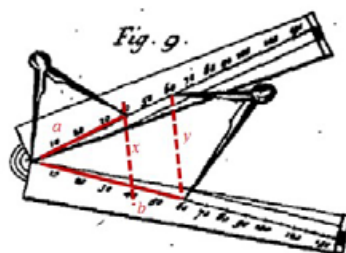


FIGURA 2. Ús general del sector de Stone (1723).

FONT: Stone, 1723: Fig. 9, Làmina VII. Les línies vermelles són de l'autora.

El sector és considerat com un instrument útil per a la matemàtica pràctica, especialment adient per a la navegació, la topografia o la projecció de l'esfera. Per a la resolució d'aquestes qüestions pràctiques resulta fonamental la trigonometria i, en particular, la doctrina dels triangles, inclosa a la tercera secció de l'annex de Stone sobre el sector anglès.⁸ A partir de la descripció del sector anglès i de la seva aplicació a la resolució de triangles, s'ha dissenyat una activitat per implementar a l'aula de matemàtiques. L'activitat dissenyada consta de dues parts: la primera es basa en la construcció d'un sector anglès en paper, i en la segona part es treballen alguns exemples d'aplicació. Aquesta activitat s'ha implementat de forma preliminar amb estudiants de matemàtiques per a l'ensenyament secundari, assignatura optativa del Grau Matemàtiques de l'FME (UPC), i amb un grup d'estudiants de l'especialitat de Matemàtiques del Màster Interuniversitari en Formació de Professorat d'Educació Secundària Obligatòria i Batxillerat, Formació Professional i Ensenyament d'Idiomes, durant el curs 2023-2024.

Primera part: construcció d'un sector anglès

La replicació d'un sector anglès és una altra manera de mostrar la resolució de triangles a futurs ensenyants de matemàtiques, fins i tot a nivell de secundària. Als estudiants de matemàtiques del segle XXI els pot sobtar que astrònoms, topògrafs o navegants del segle XVIII haguessin de fer els seus càlculs a mà, amb el suport d'instruments matemàtics, sense ordinadors ni calculadores. També és una manera de remarcar el fet que algú havia de dividir les escales de manera precisa per construir els sectors i, per tant, rescatar figures secundàries i destacar el seu paper en el procés de circulació de les idees matemàtiques.

En una primera sessió, es proposa formar grups de 2-3 estudiants per construir una rèplica de sector en paper, en particular, la línia de sinus. Com a material es necessita: paper mil·limetrat,

8. Per a més detalls sobre l'aplicació del sector anglès per a resoldre triangles, vegeu Blanco (2023).

tisores, regle, enquadernadors i calculadora. Primer, cal retallar el paper mil·limetrat per construir els dos braços del sector, i unir-los amb un enquadernador en un punt adient. A continuació, cal marcar la línia de sinus, per a la qual cosa cal tenir en compte la llargada dels braços del sector (vegeu la fig. 3). Com a referència, es pren la definició de línia de sinus del llibre de Stone:

The **line of sines** is a line of natural sines, divided from a circle of the same radius,* as the line of chords on the sector was, these are also placed upon each leg of the sector and numbered with the figures 10, 20, 30 &c to 90, at the end of which, on each leg, is set the letter S.

* It is nearly equal in length to the legs of the sector, beginning at the centre and running towards the end thereof (Stone, 1723: 66).

Aquí cal treballar amb el suport de la calculadora per trobar els valors de $\sin(10^\circ)$, $\sin(20^\circ)$, $\sin(30^\circ)$, etc. Aquests valors es multipliquen per la llargada del sector i es fa la marca corresponent sobre ambdós braços del sector. El paper mil·limetrat juga el paper de recta, o de línia de parts iguals.

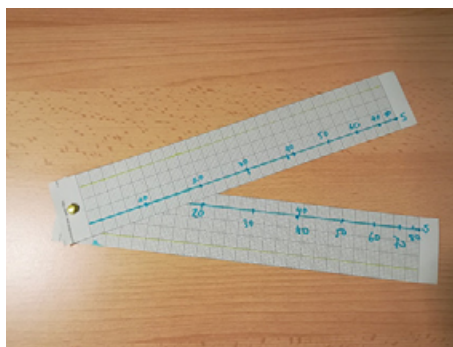


FIGURA 3. Sector fet en paper durant l'activitat a l'aula.

FONT: Elaboració pròpia.

Stone dona indicacions sobre com utilitzar el sector per calcular la corda, el sinus o la tangent de 10 graus corresponents a un radi de 3 polzades:

Suppose the chord, sine, or tangent of 10 degrees, to a radius of three inches, is required. Take those three inches, and make it a parallel between 60 and 60 on the line of chords, then, as I have already said, the same extent will reach from 45 to 45, on the line of tangents, also on the other side of the sector, the same distance of three inches will reach from 90 to 90 on the line of sines so that if the lines of chords be set to any radius, the lines of sines and tangents are also set to the same. Now the sector being thus opened, if you take the parallel distance between 10 and 10 on the line of chords, it will give the chord of 10 degrees. Also, if you take the parallel distance on the line of sines between 10 and 10, you will have the sine of 10 degrees. Lastly, if you take the parallel extent on the line of tangents, between 10 and 10, it will give you the tangent of 10 degrees (Stone, 1723: 67-68).

Seguint les instruccions donades per trobar el $\sin(10^\circ)$, el procediment es pot interpretar de la manera següent, mitjançant triangles semblants:

$$\frac{3}{\sin(90^\circ)} = \frac{L}{\sin(10^\circ)}$$

$$L = \frac{3 \sin(10^\circ)}{\sin(90^\circ)} = 3 \sin(10^\circ)$$

D'aquí es dedueix que:

$$\sin(10^\circ) = \frac{L}{3}$$

Per tant, aquest pas permet reflexionar sobre la definició de sinus, i la seva relació amb la semicorda i el radi.

Es proposa a continuació calcular el sinus de 30° corresponent a un radi de 3 cm (vegeu la fig. 4). Amb el suport del compàs, es pren la longitud 3 cm. Un extrem del compàs es fixa sobre la marca $\sin(90^\circ)$ sobre un dels braços del sector, el qual s'obre de manera que l'altre extrem del compàs coincideixi amb la marca $\sin(90^\circ)$ de l'altre braç. Aleshores s'utilitza el compàs per mesurar la distància entre les marques de $\sin(30^\circ)$ dels dos braços. Aquesta distància correspon a L .

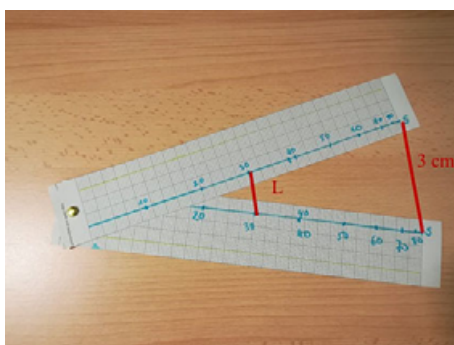


FIGURA 4. Com calcular el sinus de 30° corresponent a un radi de 3 cm a partir del sector fet en paper.

FONT: Elaboració pròpia.

Els diferents grups apunten a la pissarra el resultat obtingut, així com la llargada del seu sector (vegeu la fig. 5), i el comparen amb el valor real. La discussió sobre els resultats obtinguts facilita la reflexió, des d'una perspectiva històrica, sobre la interacció entre la pràctica i la teoria, entre artesans i científics, per millorar la precisió dels instruments de mesura. Aquest exercici també pot servir per introduir consideracions estadístiques, en línia amb Van Gulik-Gulikers, Krüger & Van Maanen (2020).

Amb la construcció i manipulació de l'instrument, l'estudiant s'implica activament en activitats pràctiques. Aquesta primera part de l'activitat fomenta la cooperació entre estudiants i la presa de decisions, per obtenir bons resultats. A continuació, es treballa la resolució de triangles amb el suport del sector construït.



FIGURA 5. Recollida de resultats a la pissarra durant l'activitat desenvolupada a l'aula.
FONT: Elaboració pròpia.

Segona part: Ús del sector en trigonometria

En una segona sessió es poden estudiar algunes de les aplicacions del sector en la trigonometria. En la Secció III, Stone il·lustra l'ús del sector en trigonometria, en particular, en la resolució de diversos casos de triangles plans, tant rectangles (usos I-VI) com obliquangles (usos VII-IX), i també triangles esfèrics (usos X-XI). La doctrina de triangles s'aplica per a resoldre qüestions pràctiques com ara la determinació d'altures o de distàncies. Stone comença treballant amb exemples de triangles rectangles (Figura 6.a):

USE II. *The perpendicular AB of the right-angled triangle ABC being given 30 miles, and the angle BCA 37 degrees, to find the hypotenuse BC. Take the given side AB, and set it over, as a parallel, on the Sine of the given angle ACB, then the parallel radius will be the length of the hypotenuse BC, which will be found 50 miles, by applying it on the line of lines (Stone, 1723: 68).*

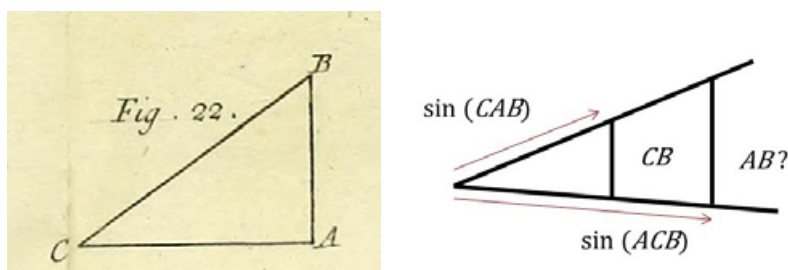


FIGURA 6. Per il·lustrar l'ús II: a) Fig. 22, làmina VII. b) Esquema.
FONT 6a: Stone, 1723: Fig. 22, Làmina VII. 6b: Elaboració pròpia.

La figura 6.b representa de manera esquemàtica la utilització del sector en aquest cas. Stone no dona cap més explicació, però la seva resolució es pot interpretar de la manera següent:

$$\frac{\sin(37^\circ)}{30} = \frac{\sin(90^\circ)}{BC}$$

Per tant, la hipotenusa buscada és:

$$BC = \frac{30}{\sin(37^\circ)}$$

Expressió de la qual es pot deduir la formulació del sinus:

$$\sin(37^\circ) = \frac{30}{BC}$$

Aquest primer exemple ofereix l'oportunitat de revisar o introduir la definició del sinus com a raó trigonomètrica, en línia amb el currículum de 4t d'ESO. Si bé és cert que la utilització de dos triangles, l'original i el corresponent al sector, pot portar a confusió, es pot aprofitar aquest exercici per treballar l'abstracció matemàtica.

Stone continua amb la resolució de triangles obliquangles, donats dos angles i un costat, amb el suport del sector anglès. Donats els angles CAB i ACB , i el costat CB , es tracta de trobar la base del triangle, AB (vegeu la fig. 7).

USE VII. *The Angles CAB, and ACB, being given, and the Side CB: to find the Base AB.*

Take the given Side CB, and turn it into the parallel Sine of its opposite Angle CAB, and the parallel Sine of the Angle ACB, will be the Length of the Base AB. (Stone 1723: 69)

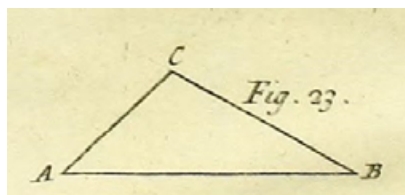


FIGURA 7. Per il·lustrar l'ús del sector.

FONT: Stone, 1723: Fig. 23, Làmina VII.

Es pren el costat CB com a sinus paral·lel de l'angle oposat, CAB . Finalment, el sinus paral·lel de l'angle ACB és la longitud AB . En notació moderna, el procediment descrit es podria escriure com:

$$\frac{CB}{\sin(CAB)} = \frac{AB}{\sin(ACB)}$$

O bé:

$$\frac{\sin(CAB)}{CB} = \frac{\sin(ACB)}{AB}$$

Malgrat no proporcionar més explicacions, resulta evident que aquí Stone utilitza el resultat avui conegut com a *lleï dels sinus*, que relaciona els costats d'un triangle qualsevol en el pla, amb els sinus dels angles oposats.⁹ Aquest exemple pot resultar més adient per al currículum de batxillerat. En aquesta segona part de l'activitat es fa una aproximació a l'estudi de la llei dels sinus des d'una

9. Es pot trobar informació detallada sobre la història de la llei del sinus a Van Brummelen (2009): 109-111, 188-189, 235-236, 246-247, 256, 267.

perspectiva històrica, per reflexionar sobre la motivació original i el context en què sorgeix el problema. Quan no és possible trobar directament una mesura, com la distància a un punt no accessible, actualment es fan servir eines electròniques, basades en l'òptica o en GPS. Abans de l'aparició del GPS, però, les eines matemàtiques utilitzades per mesurar distàncies era la combinació de triangulació, trigonometria i teoria de triangles semblants (Van Gulik-Gulikers, Krüger & Van Maanen, 2020: 236).

Reflexions finals

L'activitat presentada pretén estimular l'interès per la trigonometria, en particular, per la resolució de triangles. Té interès des del punt de vista didàctic perquè combina una experiència física (activitat manipulada amb un instrument, el sector anglès), amb la lectura d'un text matemàtic històric (fragments de l'obra de Stone relacionats amb el sector anglès). L'activitat pot ajudar a entendre millor els conceptes matemàtics, contribuint a millorar la formació integral de l'estudiant, amb un coneixement addicional del context social i científic dels períodes involucrats.

Agraïments

Voldria agrair les aportacions i els comentaris dels estudiants que han participat en l'activitat presentada, tant del Grau de Matemàtiques (FME-UPC), com de l'especialitat de Matemàtiques del Màster Universitari en Formació de Professorat d'Educació Secundària Obligatoria i Batxillerat, Formació Professional i Ensenyament d'Idiomes.

Referències bibliogràfiques

- ACKERBERG-HASTINGS, Amy (2007). «Rectangular Protractors and the Mathematics Classroom». A: SHELL-GELLASCH, Amy (ed.). *Hands On History. A Resource for Teaching Mathematics*. The Mathematical Association of America Notes, Series Number 72, p. 35-40.
- BLANCO, Mònica (2015). «On gardeners, dukes and mathematical instruments». *Bulletin of the Scientific Instrument Society*, 125, p. 22-28.
- (2023). «El uso del sector inglés en la resolución de triángulos: interacción entre la teoría y la práctica matemática en el siglo XVIII». *Quaderns d'Història de l'Enginyeria*, 21, p. 117-132.
- FRÉMONTIER-MURPHY, Camille (2013). «A new mathematical vision for an innovative calculating instrument: Galileo's sector». *Bulletin of the Scientific Instrument Society*, 118, p. 35-43.
- GREENWALD, Sarah; THOMLEY, Jill (2013). «Using the history of mathematics technology to enrich the classroom learning experience». *Electronic Proceedings of the Twenty-fourth Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics*, paper S071. <<http://archives.math.utk.edu/ICTCM/i/24/S071.html>>.
- GUEVARA CASANOVA, Iolanda; ROMERO VALLHONESTA, Fàtima; MASSA-ESTEVE, Maria Rosa (2008). «Geometria i trigonometria en el teorema de Menelau (100 dc)». A: GRAPÍ, Pere; MASSA-ESTEVE, Maria Rosa (coords.). *Actes de la III Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament*. Barcelona: IEC, Societat Catalana d'Història de la Ciència i de la Tècnica, p. 39-50.
- GUEVARA CASANOVA, Iolanda; MASSA-ESTEVE, Maria Rosa (2009). «La història de les matemàtiques dins dels nous currículums de secundària». *Actes d'Història de la Ciència i de la Tècnica*, 2 (1), p. 377-388.
- NAGAOKA, Ryosuke [et al.] (2000). «Non-standard media and other resources». A: FAUVEL Jacques; VAN MAANEN, Jan (eds.). *History in mathematics education: the ICMI study*. Dordrecht: Kluwer, p. 329-370.
- NAVARRO LOIDI, Juan (2007). «El compás de proporción, compás geométrico y militar o Pantómetra». A: GRAPÍ, Pere; MASSA-ESTEVE, Maria Rosa (coords.). *Actes de la II Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament*. Barcelona: IEC, Societat Catalana d'Història de la Ciència i de la Tècnica, p. 89-96.
- MASSA-ESTEVE, Maria Rosa (2003). «Aportacions de la història de la matemàtica a l'ensenyament de la matemàtica». *Biaix*, 21, p. 4-9.
- ROMERO VALLHONESTA, Fàtima [et al.] (2009). «La trigonometria en els inicis de la matemàtica xinesa. Algunes idees per treballar a l'aula». *Actes d'Història de la Ciència i de la Tècnica*, 2 (1), p. 427-436.
- STONE, Edmund (1723). *The construction and principal uses of mathematical instruments. Translated from the French of M. Bion, Chief Instrument-Maker to the French King. To which are added, the construction and uses of such instruments as are omitted by M. Bion*. Versió digitalitzada per Internet Archive, 2012, disponible a: <<http://archive.org/details/constructionprin00bion>>
- VAN BRUMMELEN, Glen (2009). *The mathematics of the heavens and the earth: The early history of trigonometry*. Princeton: Princeton University Press.
- VAN GULIK-GULIKERS, Iris; KRÜGER, John; VAN MAANEN, Jan (2020). «Eighteenth Century Land Surveying as a Context for Learning Similar Triangles and Measurement». A: VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, Marja (ed.). *National Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics. Teaching and Learning in the Context of Realistic Mathematics Education*, ICME-13 Monographs, Springer, p. 235-261.

NATURALEZA DE LA CIENCIA Y COLECCIONES CIENTÍFICAS: UNA PROPUESTA DE TALLER EXPERIMENTAL

ANXO VIDAL NOGUEIRA

INSTITUT INTERUNIVERSITARI LÓPEZ PIÑERO

Resumen: Esta contribución tiene como objetivo proporcionar herramientas a docentes de educación secundaria y superior para la integración de colecciones históricas en la enseñanza de las ciencias. Presentamos un taller práctico centrado en un instrumento científico histórico. En concreto, proponemos la reconstrucción de un sacarímetro —un dispositivo del siglo XIX utilizado para medir la concentración de sacarosa— dentro de un escenario histórico ficticio. Nuestro objetivo es abordar conceptos científicos al mismo tiempo que se exploran elementos históricos, filosóficos y sociológicos, fomentando un enfoque que supere fronteras disciplinares. Este taller se basa en trabajos previos centrados en el uso educativo de instrumentos históricos y se enmarca en el enfoque de la «nature of science».

Palabras clave: naturaleza de la ciencia, talleres experimentales, patrimonio científico.

Naturalesa de la ciència i col·leccions científiques: una proposta de taller experimental

Resum: Aquesta contribució té com a objectiu proporcionar eines als docents d'educació secundària i superior per a la integració de col·leccions històriques en l'ensenyament de les ciències. Presentem un taller pràctic centrat en un instrument científic històric. En concret, proposem la reconstrucció d'un sacarímetre —un dispositiu del segle XIX utilitzat per a mesurar la concentració de sacarosa— dins d'un escenari històric fictici. El nostre objectiu és abordar conceptes científics al mateix temps que s'exploren elements històrics, filosòfics i sociològics, fomentant un enfocament que superi fronteres disciplinàries. Aquest taller es basa en treballs previs centrats en l'ús educatiu d'instruments històrics i s'emmarca en l'enfocament de la «nature of science».

Paraules clau: naturalesa de la ciència, tallers experimentals, patrimoni científic.

Nature of science and scientific collections: an experience-based workshop proposal

Summary: This contribution aims to provide teachers in secondary schools and universities with practical tools to integrate historical collections in science education. We present a hands-on workshop centered around a historical scientific instrument. Specifically, we propose a reconstruction of the saccharimeter —a 19th-century device used to measure sucrose concentration— set within a fictional historical scenario. Our objective is to address scientific concepts while also exploring historical, philosophical, and sociological perspectives, fostering an approach that transcends traditional disciplinary boundaries. This workshop builds on existing work related to the educational use of historical instruments and is framed within the «nature of science» framework.

Key words: nature of science, experience-based workshops, scientific heritage.

Introducción¹

En este artículo describimos un taller historicoexperimental desarrollado en el contexto del proyecto de comunicación científica *Física Ciborg*, el cual procura aunar en un mismo espacio educativo ciencia, historia, filosofía y sociología de la ciencia¹. Pretende ser una pequeña contribución a la resolución de dos problemas: uno patrimonial y otro educativo.

El primero de los problemas tiene que ver con el rico patrimonio científico que hoy en día se conserva en numerosas universidades e institutos a nivel nacional e internacional, el cual se encuentra en situaciones muy diversas en cuanto a conservación y difusión, pero en términos generales desligadas de iniciativas educativas. Abordaremos esta cuestión en la primera sección. El segundo problema tiene que ver con la desconexión de la educación científica con los campos de la historia, filosofía y sociología de la ciencia. Una situación problemática por diversos motivos, que van desde lo pedagógico hasta lo político. En la segunda sección abordaremos una serie de propuestas para su superación, nombradamente la corriente de la *nature of science* (NOS, por sus siglas en inglés). Finalmente, describiremos una propuesta de taller historicoexperimental centrado en el sacarímetro, un instrumento para la medición de la concentración de azúcar del siglo XIX.

Patrimonio y educación científica

Las instituciones educativas son generadoras de patrimonio. Como consecuencia, hoy muchas universidades e institutos albergan conjuntos patrimoniales de gran antigüedad y valor, tanto a nivel nacional como internacional. Es habitual que el grueso de estas colecciones provenga de los antiguos gabinetes educativos configurados a lo largo del siglo XIX, en un contexto educativo en el que la demostración experimental se consolidó como indispensable en la enseñanza de las ciencias (Guijarro Mora, 2017). Estos gabinetes crecieron a lo largo de las décadas, hasta caer en el desuso y en el olvido —con una intensidad variable entre instituciones— en algún momento del siglo XX.

Hoy son conservadas con un estatus enormemente variable, desde la exposición pública hasta el almacenamiento negligente (Lourenço, 2005). En el ámbito nacional, tras un esfuerzo catalogador notable a finales del siglo pasado y comienzos del presente, hoy existen numerosos catálogos, webs y asociaciones sobre este patrimonio a nivel nacional (Del Egidio Rodríguez, 2000; Bertomeu Sánchez

1. Física Ciborg es un proyecto de comunicación científica coorganizado por el Institut Interuniversitari López Piñero de la Universitat de València y la Facultade de Física de la Universidade de Santiago de Compostela. Está financiado por la Fundación Española para la Ciencia y la Tecnología (FECYT) [FCT-23-19590]. Entre sus actividades se encuentran la realización de exposiciones, vídeos divulgativos, rutas urbanas y talleres experimentales.

y García Belmar, 2002; Sisto Edreira y Losada Sanmartín, 2009; Vallmitjana i Rico, 2011; VV. AA., 2008). Sin embargo, el patrimonio científico histórico continúa en una situación de cierta indefinición, sin una integración clara en las prácticas educativas —e investigadoras en el caso de la universidad—, salvo algunas excepciones².

Existe, por otro lado, cierto consenso en el ámbito académico de la cultura material y los estudios sobre el patrimonio científico en que la consolidación de las colecciones pasa en buena medida por su integración en el ámbito didáctico (Lourenço y Wilson, 2013; Simpson, 2014; Alberti, 2017). En las últimas décadas han surgido diferentes propuestas a lo largo y ancho del ámbito europeo y americano en este sentido³. Lejos de existir un marco común, las propuestas se caracterizan por la pluralidad de enfoques y objetivos, fruto de un contexto diverso en lo que se refiere a la disponibilidad de recursos, estado de las colecciones y procedencia disciplinar de los diferentes proyectos. Así, las aproximaciones varían desde la catalogación de instrumentos hasta la realización de trabajos de conservación, con todo un espectro entre medias: visitas guiadas a las colecciones, realización de trabajos de investigación, reconstrucción de experimentos históricos, diseño de exposiciones...

Por nuestra parte, una vez asumida la necesidad de dar un uso educativo al patrimonio, más allá de la decoración a la que se ve relegada en muchas instituciones, nos hemos planteado qué aproximación sería la óptima para ello. Hemos concluido que el enfoque de la *Nature of Science* es el que ofrece mayores posibilidades a la hora de sacarle partido al patrimonio histórico.

Nature of Science

La educación científica actual se encuentra del todo desligada de la reflexión humanística. En el ámbito educativo, tanto en el secundario como en la universidad, se potencia la división entre ciencias y humanidades en un esquema disciplinar fuertemente dividido y estanco, donde el diálogo entre materias o grados es ora beligerante ora inexistente. En España, por ejemplo, la presencia de asignaturas que lidien con aspectos históricos o sociales en las carreras científicas es minoritario.

Desde hace varias décadas y desde diferentes ámbitos se viene advirtiendo sobre lo problemático de esta situación y lo necesario que resulta incluir en la educación una contextualización de la práctica científica. McComas y Clough, en la panorámica *Nature of Science in Science Instruction* (2020), proporcionan una lista de motivos por los que la inclusión de la NOS es necesaria en cualquier educación científica que se precie: por ser necesaria para entender la ciencia; por despertar interés en los estudiantes y promover la apreciación de la actividad científica; por tener utilidad práctica a la hora de realizar ciencia; por resultar vital para el ejercicio ciudadano, y por ayudar a los estudiantes a comprender mejor ciertos contenidos científicos. A ello podríamos sumarle los riesgos asociados a un ejercicio profesional de la ciencia sin herramientas críticas para valorar su rol social, económico o político. En este sentido, existe una clara relación entre una visión superficial de la práctica científica —promovida especialmente, por otro lado, desde el ámbito de la divulgación científica— y una visión tecnocrática de la relación ciencia-sociedad, tal y como ha mostrado Bucchi (2009). La naturaleza de la ciencia debe formar parte de la educación científica por ser esencial para una ciencia

2. Son quizás excepciones en este sentido la Facultat de Física de la Universitat de Barcelona y el Institut Interuniversitari López Piñero de la Universitat de València, que desarrollan con cierta frecuencia acciones educativas alrededor de sus colecciones, integradas dentro de diversos grados.

3. Muchas de ellas pueden encontrarse en revistas especializadas como el *University Museums and Collections Journal*.

crítica y democrática.

Existe numerosa literatura en torno a la naturaleza de la ciencia y la contextualización de la práctica científica en el aula (Prestes y Silva, 2018). En un principio, la NOS procuró establecer una serie de descriptores que diesen cuenta de la complejidad de la ciencia y sustituyesen a la noción naíf de método científico, y alcanzó en ello cierto consenso (Lederman *et al.*, 2002). La utilidad de esta lista de principios, sin embargo, ha sido cuestionada ya que podría ser asimilada dogmática y acríticamente por el alumnado, por lo que se caería de nuevo en parte de los problemas que se procuraban superar. Mathews (2015) aboga por una aproximación más amplia, que sustituya la demasiado rígida noción de «naturaleza de la ciencia» por una más flexible, las «características de la ciencia» —o *features of science* en el inglés original, FOS por sus siglas—. Ello permitiría tratar aspectos más alejados de la metodología científica en un sentido estricto y abordar cuestiones más amplias relacionadas con la política, la economía o la cultura. Como una muestra del tipo de cuestiones que podrían ser de interés tratar en el aula de ciencia, asumiendo esta perspectiva de los FOS, citamos al propio Mathews (2015: 404):

What is a scientific explanation? What is a controlled experiment? What is a crucial experiment, and are there any? How do models function in science? How much confirmation does a hypothesis require before it is established? Are there ways of evaluating the worth of competing research programmes? Did Newton's religious belief affect his science?

En un tono similar respecto de la necesidad de no limitar la educación de la NOS a una serie de principios a modo de «receta», se encuentra la propuesta de Douglas Allchin, quien aboga especialmente por el uso de la historia de la ciencia en el aula. En su obra *Teaching the Nature of Science* (2013) identifica una serie de problemas en la visión de la ciencia que promueve la educación actual. Una de ellas sería la mitificación de la actividad científica y de la figura del científico. Critica en este sentido el uso de la «pseudohistoria» en la educación científica, una historia adulterada con tendencia a justificar valores morales a través de la historia y a romantizar la historia de la ciencia a través de momentos *eureka*. Critica también su simplificación, su nula referencia a errores y el uso constante de la idea de experimento crucial, así como la ausencia total de elementos contingentes en el desarrollo de la ciencia.

Así, el taller que proponemos se sitúa en estas corrientes, asumiendo la necesidad de incluir la naturaleza de la ciencia en la educación científica y creyendo en la utilidad de la historia a la hora de construir propuestas en ese sentido. Los instrumentos científicos nos ofrecen una gran oportunidad en ese sentido, como veremos.

La propuesta: talleres experimentales sobre casos históricos

Nuestra propuesta recoge, por un lado, la tradición de la NOS e intenta integrar en ellos instrumentos científicos. Nos hemos apoyado para ello en los *Harvard Case Histories in Experimental Science* (Conant, 1957), que exponen un conjunto de casos históricos alrededor de la práctica experimental, así como en los *Minnesota Case Studies*, un conjunto, también, de casos históricos que pretenden mostrar la naturaleza de la ciencia procurando incluir también factores culturales, biográficos, elementos de género, clase y la cultura material de la ciencia. Por otro lado, a la hora de pensar en la construcción de iniciativas didácticas a partir de instrumental antiguo, nos hemos

apoyado en la obra editada por Heering y Cavicchi *Historical Scientific Instruments in Contemporary Education* (2022), especialmente en las aproximaciones que se basan en la participación activa del estudiantado y la reconstrucción de experimentos e instrumentos antiguos. También las reconstrucciones realizadas en el marco del curso *Material Culture of Science in the History of Physics* han servido de apoyo para el presente taller⁴.

Creemos que la combinación de estas dos tradiciones puede aportar grandes beneficios. Por un lado, consideramos que cualquier iniciativa alrededor de instrumental histórico debe incluir la perspectiva de la NOS. La reconstrucción de experimentos históricos tanto puede promover el aprendizaje de una ciencia contextualizada y la comprensión de su naturaleza, como puede estar al servicio de una narrativa monumentalista e idealizada, que toma los significados actuales y los proyecta en el pasado, naturalizando ciertos puntos de vista y promoviendo una visión teleológica de la historia científica ya tiempo atrás descartada por la comunidad de historiadores de la ciencia. Para que el patrimonio no sea descontextualizado es preciso incluir la NOS como eje vertebrador de cualquier iniciativa educativa. Por otro lado, los casos históricos focalizados en la NOS pueden verse beneficiados de una mayor atención a los instrumentos científicos. Permite superar cierto personalismo presente en algunos casos históricos de este tipo, al estar contruidos alrededor de una figura de la mitología científica (Robert Hooke, Galileo, Darwin...). Los instrumentos permiten focalizarse en prácticas, fenómenos, espacios, técnicos invisibles... Superan nombres propios y con ello una visión simplista de la construcción del conocimiento. Además, la materialidad de los objetos patrimoniales permite transmitir de forma muy palpable la naturaleza histórica y cambiante de la ciencia, contribuyendo a la construcción de una imagen contextualizada de la misma. Finalmente, comprender el funcionamiento de los aparatos requiere abordar elementos estrictamente científicos (fenómenos, leyes...), lo cual facilita su inclusión en materias no humanísticas y, en consecuencia, su integración en los planes de estudio actuales.

Una propuesta concreta con el sacarímetro

El presente taller nace, como ya hemos dicho, de la experiencia del proyecto de comunicación científica Física Cíborg. Todos los talleres realizados al abrigo de este proyecto se articulan a partir de un instrumento científico de una colección universitaria. En particular, de las universidades de Santiago y de València. Los talleres consisten en la replicación de algún procedimiento experimental relacionado con la pieza patrimonial. La reconstrucción, por otra parte, se lleva a cabo en un escenario histórico ficticio que permite abordar elementos de la naturaleza de la ciencia, siguiendo lo propuesto por Allchin en su módulo sobre el juicio de Galileo (2013: 202-225).

El presente taller se ha realizado para alumnado de diferente perfil, desde bachillerato hasta personas mayores en programas formativos de extensión cultural, pasando por población general en ámbitos divulgativos. Se trata de un taller fácilmente adaptable a diferentes públicos. En este sentido, la principal dificultad para su realización radica en la comprensión de los fenómenos de polarización de la luz y de actividad óptica, por lo que es recomendable su realización con alumnado con unas nociones básicas de física y, especialmente, de óptica. Consideramos que el alumnado de bachillerato y educación superior son los que podrían sacar mayor partido al presente taller.

4. Desarrollado en el Deutsches Museum en 2024, conducido por Peter Heering y Julia Bloemer (Europa-Universität Flensburg), Johannes-Geert Hagmann (Deutsches Museum) y Kristen Frederick-Frost (National Museum of American History).

Descripción y breve historia del sacarímetro

Un sacarímetro es un instrumento de medición utilizado en diferentes versiones, y con diferentes nombres, desde mediados del siglo XIX hasta principios del XX para determinar la concentración de ciertas sustancias en una disolución, con especial aplicación para el caso de la sacarosa. Se basa en la actividad óptica de este tipo de disoluciones, que giran el plano de polarización de la luz que las atraviesa. El sacarímetro permite medir dicha rotación, lo cual se puede relacionar con la cantidad de sustancia ópticamente activa presente en una disolución dada y, con ello, determinar la concentración de aquella.

Un sacarímetro consiste en una fuente de luz, un sistema polarizador, la disolución a medir, otro sistema polarizador y un ojo capaz de ver, en ese orden (véase la fig. 1). El procedimiento de medición es relativamente sencillo. Primero se calibra el sistema sin ninguna muestra entre los dos polarizadores: se ajusta la posición relativa de los polarizadores girando —o haciendo una acción equivalente, según el tipo de sistema polarizador— el segundo polarizador, denominado «analizador», hasta alcanzar cierta imagen. La imagen específica que ha de buscarse depende del tipo de sacarímetro, en uno del tipo Soleil-Duboscq, por ejemplo, ha de procurarse la igualación de los colores de dos semicírculos. En la versión propuesta en este taller habrá de buscarse la extinción (máxima) de la luz procedente de la fuente luminosa.

Una vez alcanzada dicha imagen, se procede a colocar la muestra. Por efecto de la interacción de las moléculas de la sacarosa con la luz, que giran su plano de polarización, la imagen producida por el sistema habrá cambiado respecto de la inicial, ya que la luz llega al analizador con un ángulo de vibración diferente al inicial. Ahora se debe ajustar la posición relativa de los polarizadores girando el analizador hasta alcanzar, de nuevo, la misma imagen que en el paso primero.

Midiendo el giro necesario en este segundo paso puede saberse la diferencia entre las posiciones relativas de los polarizadores con y sin disolución, esto se relaciona de forma directa con el giro del plano de polarización producida por la muestra y ello con la concentración de la misma. Cuanto mayor es el giro necesario en el segundo paso, mayor será la concentración de la muestra.

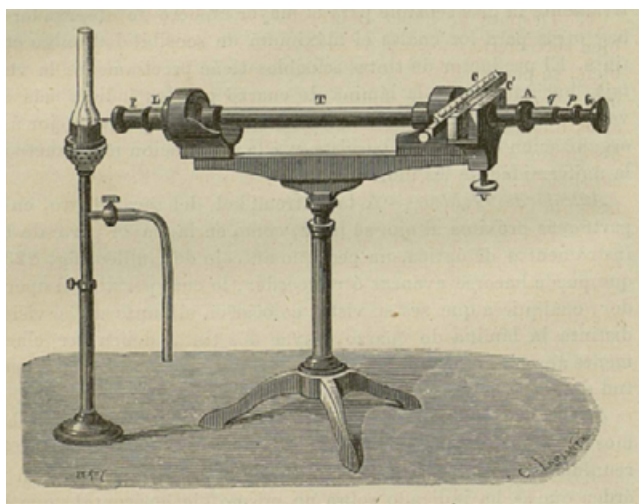


FIGURA 1. Un sacarímetro de Soleil. A la izquierda se encuentra la fuente de luz, en P y A dos polarizadores y en T la muestra. El ojo del medidor observaba a través del anteojo G, situado a laderecha.

FUENTE: *Manipulaciones de física* de Henri Buignet (1887).

El sacarímetro tiene sus orígenes en los trabajos de Jean-Baptiste Biot sobre la actividad óptica en la primera mitad del siglo XIX (Johnston, 1998). Durante el siglo XIX y parte del XX se desarrollaron un gran número de modelos con diversas variaciones. El sacarímetro fue ganando importancia paulatinamente hasta ser común en manuales de física y química, así como en los gabinetes científicos de universidades e institutos. El motivo de su popularidad lo resume Henri Buignet en sus *Manipulaciones de física* (1887: 483):

(...) la cuestión industrial que a él se refiere es de tal importancia, que se han buscado medios más sencillos y sobre todo más prácticos para obtener su solución. Con este objeto se ha construido el instrumento denominado sacarímetro.

La cuestión industrial a la que hacía referencia Buignet tiene que ver con el peso económico que ganó la manufactura de azúcar a lo largo del siglo XIX. El sacarímetro permitía determinar la pureza de una muestra de azúcar bruto, esta capacidad resultaba de enorme interés en la cada vez más importante industria azucarera. Una de las aplicaciones más destacables del sacarímetro se dio en los laboratorios aduaneros de los Estados Unidos, donde se convirtió en el estándar de medida para la pureza del azúcar bruto de importación (Singerman, 2007). El instrumento adquiría así una importancia capital, ya que venía a resolver una cuestión con enorme controversia:

By the turn of the century, the lack of uniform and accurate saccharimetric methods had become a never-ending source of disputes between commercial interests and the government, and many millions of dollars were at stake (Singerman, 2007: 57).

Y es que un error de unos pocos grados en la medición del giro de polarización, y por tanto en la concentración de la muestra, podía suponer miles de dólares en aranceles para una empresa importadora y para la hacienda pública, con beneficio o perjuicio para ellos dependiendo de si el error era en exceso o en defecto. La mejora paulatina del sacarímetro y las disputas en torno a él se relacionan de forma directa con la economía del momento y las políticas proteccionistas de diversos países. Es un ejemplo claro de construcción de un estándar, en este caso de medición, central en la relación ciencia-estado-mercado.

El sacarímetro es un instrumento conveniente para un taller como el que planteamos por diversos motivos. Por un lado, es un aparato habitual en las colecciones históricas de universidades, institutos y museos (véase la fig. 2). Por otro lado, su funcionamiento esquemático es relativamente sencillo, aunque no totalmente evidente, lo cual nos permite situar a los participantes en una situación de replicación sugerente en la que realmente pueden desarrollar un proceso activo de resolución de problemas, así como abordar conceptos fundamentales de física y química. Por otro lado, el sacarímetro es un instrumento con cierta literatura a su alrededor, lo que permite contextualizarlo históricamente de forma rigurosa.



FIGURA 2. Sacarímetro de Soleil, perteneciente a la Colección de Física y Química del IES Francisco Ribalta (Castelló de la Plana). Ejemplares como este, o similares, son comunes en los gabinetes históricos de institutos y universidades en España.

FUENTE: Comissió d'instruments científics.

El taller

El taller cuenta con cuatro partes: explicación de conceptos físicos, reconstrucción, discusión de elementos de la NOS y encuentro con el aparato.

Primera parte: conceptos físicos

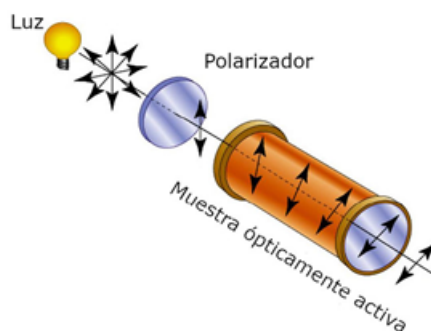


FIGURA 3. Diagrama que muestra el giro en la vibración de la luz linealmente polarizada provocado por una sustancia ópticamente activa.

FUENTE: elaboración propia a partir de Skripta 2.LF, CC BY-SA 4.0

<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0>, via Wikimedia Commons.

En la primera parte se lleva a cabo la explicación de dos conceptos físicos: el de polarización y el de actividad óptica. La explicación puede llevarse a cabo de la manera que resulte más conveniente a juicio del docente. Se recomienda, en todo caso, apoyarse para ello en láminas polarizadoras, para mostrar el efecto producido en diferentes posiciones relativas de los mismos. Ello será fundamental para la reconstrucción posterior.

Es crucial que el estudiantado comprenda que el paso de la luz depende del ángulo relativo entre

los dos polarizadores, y que ello se debe a que éstos solamente dejan pasar la luz que vibra en una cierta dirección. Así mismo, debe quedar claro que una sustancia ópticamente activa es capaz de girar esa dirección de vibración. Resulta útil la utilización de diagramas (véase la fig. 3).

Segunda parte: la reconstrucción

La reconstrucción propone un juego ficcional en el que los participantes pretenden ser científicos del siglo XIX. La ficción, como hemos dicho, pretende introducir una serie de elementos propios del contexto científico decimonónico que servirán de punto de partida para la discusión de los conceptos de la NOS en la tercera parte. El juego ficcional puede llevarse al extremo asignando identidades a los participantes: un médico, un boticario, un ingeniero... De este modo puede ponerse sobre la mesa una imagen de la comunidad científica y académica del siglo XIX, copada por hombres liberales y académicos de clase media-alta y discutir, en la tercera parte, elementos relacionados con el sesgo de género y de clase en la práctica científica.

Una vez presentado el escenario ficcional y asignados, en su caso, los roles, se visualiza un vídeo en el que se muestra la utilización de un sacarímetro Soleil-Duboscq del siglo XIX.⁵ Se trata de una de las reproducciones realizadas por Paolo Brenni y su equipo con la colección de la Fondazione Scienza e Tecnica de Florence, las cuales mantenían una altísima fidelidad a los procedimientos y materiales originales (Brenni, 2021). El vídeo es presentado a los participantes como si se estuviese asistiendo a una demostración pública sobre el funcionamiento del sacarímetro por parte de «un sabio italiano», que habría estado realizando cursos y demostraciones en España. Introducimos de este modo la figura del demostrador, que tuvo una gran importancia en la difusión del conocimiento científico y en el surgimiento de una cultura científica en los siglos XVIII y XIX. El demostrador ficticio del que se habla en la carta bien podría ser un alter ego de François de Bienvenu, demostrador francés que realizó diversas demostraciones en la España decimonónica (Suay-Matallana y Bertomeu Sánchez, 2016).

Tras la visualización del vídeo se reparte a los participantes una carta de un ficticio colega científico que, se nos revela, también asistió a la misma demostración.⁶ La carta fue un medio esencial en la ciencia de los siglos XVIII, XIX y parte del XX. Su inclusión en el taller nos permitirá posteriormente discutir sobre las formas en las que los científicos han transmitido su conocimiento a lo largo de la historia y las limitaciones inherentes a estos medios.

El colega científico explica en la carta que él ha conseguido replicar el aparato con material mucho más asequible que el utilizado por el sabio italiano. En particular, solo necesitó un frasco casero con la disolución a medir, una fuente de luz y dos láminas polarizadoras de su invención, las cuales nos envía como muestra junto a la carta —se trata de láminas polarizadoras modernas de fácil obtención. La cuestión de la asequibilidad del material nos servirá para discutir sobre la obtención de recursos para la investigación científica.

En el resto de la carta nos describe de forma esquemática la disposición de los materiales y los pasos a seguir para determinar el giro de polarización de la luz y, con ello, una estimación de la concentración de azúcar. Tras leer la carta, los participantes han de, por grupos, intentar replicar el referido instrumento con los mismos materiales: las dos láminas polarizadoras, un bote de vidrio cerrado

5. <https://www.youtube.com/watch?v=hTEMgXSX6ak>

6. Disponible aquí: <https://fisicaciborg.blogs.uv.es/carta-taller-sacarimetro/>

con una disolución de agua y azúcar (la concentración ha de ser considerablemente elevada para que el giro de la polarización sea lo suficientemente perceptible), y su teléfono móvil como fuente de luz.

La disposición a la que deberían llegar, la más conveniente, es la indicada en la figura 4. Dispuesto el móvil encima de una superficie plana, haciendo de fuente luminosa, se coloca una lámina polarizadora encima de él. Luego, se toma con una mano la otra lámina polarizadora y se coloca en el eje vertical sobre el teléfono y la otra lámina. Así queda formado un sistema óptico teléfono-lámina-lámina-ojo (parte izquierda de la fig. 4). En esa disposición se realiza el calibrado, buscando la extinción de la luz del teléfono girando el polarizador que se tiene en la mano, delante del ojo. Una vez encontrada la extinción máxima de la luz proveniente del móvil, y sin mover ninguno de los polarizadores, se coloca la muestra tomándola con la otra mano, así queda formado un sistema teléfono-lámina-muestra-lámina-ojo (parte derecha de la fig. 4) y se observa que la extinción de la luz ya no es máxima, ahora pasa una mayor cantidad de luz por el sistema. Se gira el segundo polarizador hasta alcanzar de nuevo la extinción de la luz y se estima el ángulo del giro realizado.

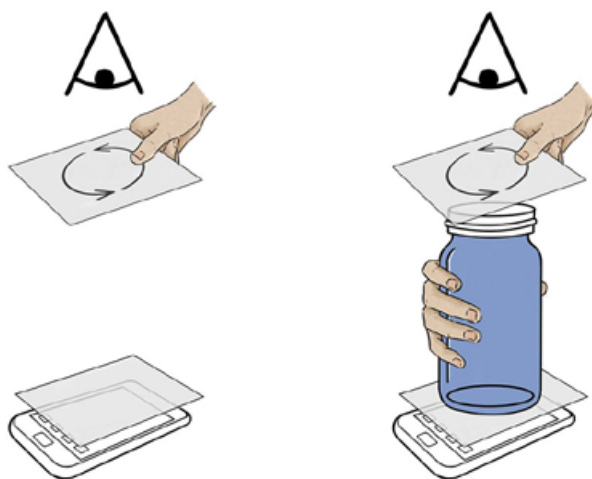


FIGURA 4. Disposición idónea de los elementos para la reconstrucción del sacarámetro, alineados en el eje vertical. A la izquierda, el calibrado, realizado sin interponer ninguna muestra y girando el analizador hasta alcanzar la extinción de la luz. A la derecha, la medida, colocando la muestra y, partiendo de la posición anterior, girando el analizador hasta alcanzar de nuevo la extinción.

FUENTE: elaboración de Ainoa Vigil Llaó.

El desarrollo de la experiencia depende de cada grupo, de su formación, de su edad, de la hora del día y del día de la semana. Pero hay una serie de elementos que se repiten en la mayoría de las ediciones. La más importante es la incapacidad de alcanzar el resultado final siguiendo únicamente las instrucciones dadas en la carta. A pesar de que esta es rigurosa y suficiente para realizar la reconstrucción, no informa de algunos elementos que resultan muy convenientes, o directamente necesarios, para realizar la reconstrucción. Es habitual, por ejemplo, que los estudiantes intenten realizar la medición en el eje horizontal, lo cual es inconveniente por motivos posturales y por realizar la luz poco recorrido en la disolución. Para alcanzar la disposición óptima ha de ocurrírseles abrir el bote de cristal, algo que no siempre ocurre sin asistencia del docente.

Las dificultades en la replicación permitirán abordar en la tercera parte un elemento de la actividad científica en particular: el conocimiento tácito. Existe un cierto tipo de conocimiento

difícilmente transmisible a través de textos escritos y es habitual que la replicación experimental se vea dificultada por la limitación de los textos. Los estudiantes lo experimentan en sus propias carnes: precisan realizar manipulaciones con los materiales para conseguir la disposición más apropiada, probar y proponer cosas que no se encuentran explícitamente en el texto. Una vez conseguida —a menudo de forma colectiva, apoyándose en los avances de los diferentes grupos— comprueban que, en efecto, el texto contenía la información de forma rigurosa, pero que, sin embargo, no era suficiente. Todo ello permite reflexionar sobre la complejidad y las limitaciones de la replicación como parte del proceso de construcción de conocimiento.

El sistema propuesto es enormemente imperfecto. No permite realizar mediciones precisas y sin más acciones de calibrado tampoco permite determinar cuantitativamente la concentración de sacarosa. La cuestión de la precisión puede ser también tratada en la tercera parte y conectarla con la cuestión de la creación de estándares, en la que científicos, reguladores e industria deben alcanzar un consenso sobre qué instrumento o método es lo suficientemente preciso y reproducible.

En ocasiones, algunos participantes se sienten bloqueados, incapaces de avanzar y pueden llegar a desmotivarse. En este sentido, es crucial que el docente desarrolle un papel de guía, proporcionando pistas que permitan avanzar a los diferentes grupos hacia la configuración final. Una buena forma es notificar a todos los participantes cuando algún grupo realiza un avance significativo.

Tercera parte: discusión

La tercera parte es la que cuenta con mayores opciones. Consiste en la explicación y discusión conjunta de algunos elementos de la práctica científica puestos en evidencia en el desarrollo del taller. Así, las características del propio taller nos servirán para abordar las características de la ciencia. A la discusión sobre el conocimiento tácito se le pueden sumar otras ya citadas: la relación entre la ciencia y la industria, que es parte fundamental en la historia del sacarímetro; la carta como medio de comunicación científico; el sesgo de clase y de género en la práctica científica...

Todo ello puede alargarse lo que el docente considere pertinente, haciendo uso de los recursos que considere oportunos y sumando las actividades que juzgue útiles para afianzar los conceptos abordados. En nuestro caso, optamos por la explicación del concepto de conocimiento tácito, permitiendo, e impulsando, la participación de los estudiantes en la discusión, para que den su punto de vista y expliquen las dificultades encontradas. Asimismo, también se explica la historia del sacarímetro y su importancia en la industria. A menudo, las preguntas de los propios alumnos dan pie a abordar otros elementos de los mencionados en la anterior sección.

Es evidente que los conocimientos del docente respecto de las referidas cuestiones de la NOS jugarán un papel importante, por lo que se priorizarán algunos contenidos sobre otros. En este sentido, se recomienda la lectura de la bibliografía citada.

Cuarta parte: encuentro con el objeto

La última parte del taller consiste en el encuentro con el instrumento patrimonial de la colección. La experiencia museística será particular de cada institución y espacio expositivo, pero la ejecución previa del taller es capaz de potenciarla. Es habitual que, al visualizar el instrumento en la exposición, los estudiantes manifiesten cierta emoción por reconocerlo al instante. El encuentro con el objeto es ahora más significativo de lo que hubiese sido sin la realización del taller, debido al mutismo propio del instrumental científico, que dificulta a menudo la interacción con el objeto.

El haber desarrollado una experiencia previa sobre el instrumento enriquece, a nuestro juicio, lo que Söderqvist, Bencard y Mordhorst llaman el *presence effect* del objeto, esto es, la reacción inmediata producida por la presencia del mismo (Söderqvist *et al.*, 2009). Ese efecto, mediado por los sentidos y previo a cualquier conceptualización lingüística, es propio de cada visitante, que se apropiará del aparato de un modo personal y único. En este sentido, no es preciso dotar de significado al aparato en el propio espacio expositivo, más allá de una información contextual mínima (datación y procedencia). Conviene permitir que los estudiantes, ahora visitantes, interactúen con el objeto del modo que prefieran y hagan las preguntas, si así lo consideran, que deseen. Los pasos previos del taller deben potenciar la experiencia museística, pero siendo esta independiente y en la cual el protagonista es el aparato, no las interpretaciones científicas, culturales, sociales, económicas y políticas que sobre él se puedan desplegar.

Comentarios finales

Con este artículo hemos intentado proporcionar una herramienta útil para el profesorado universitario y de secundaria para la integración de colecciones históricas en la práctica educativa. Nuestra experiencia muestra que es posible crear acciones educativas a partir de instrumental histórico que incluya como parte esencial de las mismas la perspectiva de la NOS.

Más allá de la posible replicación de este mismo taller, creemos que podría servir de ejemplo para la construcción de acciones didácticas similares, que aúnen ciencias y humanidades en un mismo espacio. Las colecciones históricas ofrecen una gran oportunidad para ello, a través de la replicación experimental u otras dinámicas. La conservación y puesta en valor de este patrimonio pasa, en buena medida, por ello.

Bibliografía

- ALBERTI, Samuel. (2017). «Why Collect Science?». *Journal of Conservation and Museum Studies*, 15 (1), p. 1-10.
- ALLCHIN, Douglas (2013). *Teaching the Nature of Science: Perspectives & Resources*. Saint Paul: SHIPS Education Press.
- BERTOMEU SÁNCHEZ, José Ramón; GARCÍA BELMAR, Antonio (2002). *Abriendo las cajas negras: Colección de instrumentos científicos de la Universitat de València*. València: Universitat de València.
- BRENNI, Paolo (2021). «Filming Nineteenth Century Physics Demonstrations with Historical Instruments». En: CAVICCHI, Elizabeth; HEERING, Peter. (ed.). *Historical Scientific Instruments in Contemporary Education*. Leiden: Brill, p. 34-49.
- BUCCHI, Massimiano (2009). *Beyond Technocracy: Science, Politics and Citizens*. New York: Springer.
- BUIGNET, Henri (1887). *Manipulaciones de Física, curso de trabajos prácticos ejecutados en la escuela superior de farmacia de París*. Traducción de Francisco Angulo y Suero. Madrid: administración de la revista de medicina y cirugía prácticas.
- CAVICCHI, Elizabeth Y HEERING, Peter (ed.) (2022). *Historical Scientific Instruments in Contemporary Education*. Leiden: Brill.
- CONANT, James Bryant (1957). *Harvard Case Histories In Experimental Science*. Harvard: Harvard University Press.
- DEL EGIDO RODRÍGUEZ, Ángeles (2000). *Instrumentos científicos para la enseñanza de la física: Estudio realizado por el Museo Nacional de Ciencia y Tecnología de la colección histórica de instrumentos científicos de la Facultad de Ciencias Físicas de la Universidad Complutense de Madrid*. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, Subdirección General de Información y Publicaciones.
- JOHNSTON, Sean F. (1998). «Polarimeter, Chemical». En BUD, R.; WARNER, J. D. *Instruments of Science, an historical encyclopedia*. New York: Science Museum, London, y National Museum of American History, Smithsonian Institution, en asociación con Garland Publishing.
- LEDERMAN, Norm G.; ABD-EL-KHALICK, Fouad; BELL, Randy L.; SCHWARTZ, Renée S. (2002). «Views of nature of science questionnaire: Toward valid and meaningful assessment of learners' conceptions of nature of science». *Journal of Research in Science Teaching*, 39 (6), p. 497-521.
- LOURENÇO, Marta C. (2005). *Between two worlds: The distinct nature and contemporary significance of university museums and collections in Europe*. París: Conservatoire national des arts et métiers, École doctorale technologique et professionnelle.
- LOURENÇO, Marta C.; WILSON, Lydia (2013). «Scientific heritage: Reflections on its nature and new approaches to preservation, study and access». *Studies in History and Philosophy of Science*, 44 (4), p. 744-753.
- MATTHEWS, Michael R. (2015). *Science teaching: The contribution of history and philosophy of science, 20th anniversary revised and expanded edition*. 2ª ed. New York: Routledge.
- MCCOMAS, William F.; CLOUGH, Michael P. (2020). «Nature of Science in Science Instruction: Meaning, Advocacy, Rationales, and Recommendations». En: MCCOMAS, William F. (ed.), *Nature of Science in Science Instruction: Rationales and Strategies*. Cham: Springer International Publishing, p. 3-22.
- PRESTES, María Elice de Brzezinski; SILVA, Cibelle Celestino (ed.) (2018). *Teaching Science with Context: Historical, Philosophical, and Sociological Approaches*. Cham: Springer International Publishing.
- SIMPSON, Andrew (2014). «Rethinking university museums: Material collections and the changing world of higher education». *Museums Australia Magazine*, 22, p. 18-22.
- SINGERMAN, David (2007). «"A doubt is at best an unsafe standard": Measuring sugar in the early Bureau of Standards». *Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology*, 112 (1), p. 53-66.
- SISTO EDREIRA, Rafael Carlos; LOSADA SANMARTÍN, María Luisa (2009). *Historia da Física na Universidade de Santiago de Compostela*. Santiago de Compostela: Universidade de Santiago de Compostela, Servizo de Publicacións e Intercambio Científico.

SÖDERQVIST, Thomas; BENCARD, Adam; MORDHORST, Camilla (2009). «Between meaning culture and presence effects: Contemporary biomedical objects as a challenge to museums». *Studies in History and Philosophy of Science*, 40 (4), p. 431-438.

SUAY-MATALLANA, Ignacio; BERTOMEU SÁNCHEZ, José Ramón (2016). «François Bienvenu y la popularización científica en la Ilustración: Demostraciones experimentales, entretenimiento y públicos de la ciencia».

Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas, 34 (2), p. 167-184.

VALLMITJANA I RICO, Santiago (2011). *Instrumentos científicos: Catálogo de la Facultad de Física de la Universidad de Barcelona*. Barcelona: Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona.

VV.AA. (2008). *Inventario de instrumentos científicos y técnicos del patrimonio de la Universidad de Granada*. Granada: Universidad de Granada.

EL ARENARIO DE ARQUÍMEDES

JUAN NAVARRO LOIDI

CÁTEDRA SÁNCHEZ MAZAS (UPV-EHU)

Resumen: El arenario es un texto breve escrito por Arquímedes en el que explica cómo se puede expresar el número de granos de arena que llenarían el mundo. Su razonamiento le lleva a plantearse cómo es el cosmos, cómo se pueden denotar grandes cantidades y cómo operar con ellas utilizando el antiguo sistema numérico de los griegos, para acabar calculando la cantidad buscada. Este texto de Arquímedes puede utilizarse en clase para introducir sistemas de numeración, notación científica y los diferentes sistemas que han existido para describir el cosmos.

Palabras clave: Aritmética, sistemas de numeración, notación científica, cosmología, matemáticas en la antigua Grecia.

L'arenari d'Arquimedes

Resum: L'arenari és un text breu escrit per Arquimedes en el qual explica com es pot expressar el nombre de grans d'arena que omplirien el món. El seu raonament el porta a plantejar-se com és el cosmos, com es poden denotar grans quantitats i com operar amb elles utilitzant l'antic sistema numèric dels grecs, per acabar calculant la quantitat buscada. El text d'Arquímedes es pot utilitzar a classe per introduir sistemes de numeració, notació científica i els diferents sistemes que han existit per descriure el cosmos.

Paraules clau: Aritmètica, sistemes de numeració, notació científica, cosmologia, matemàtiques a l'antiga Grècia.

Archimedes' Sand-Reckoner

Summary: The Sand-Reckoner is a short text written by Archimedes in which he explains how can be expressed the number of grains of sand that would fill the world. His reasoning leads him to consider what the cosmos is like, how can be denoted large quantities, and how operate with them using the old numerical system of the Greeks, to end up calculating the quantity sought. Archimedes' text can be used in class to introduce numbering systems, scientific notation and the different systems that have existed to describe the cosmos.

Keywords: Arithmetic, numeral systems, scientific notation, cosmology, mathematics in ancient Greece.

Introducción

El texto que se va a comentar, *El arenario*, trata de aritmética y de astronomía, mientras que la mayoría de las obras de Arquímedes (Siracusa ca. 287 a. C. - ca. 212 a. C.)¹ que se conservan tratan fundamentalmente de sus descubrimientos en geometría o mecánica. Pero es un escrito que puede ser útil en clase porque introduce también cuestiones de geometría y de historia, y es una buena base para proponer situaciones de aprendizaje pluridisciplinar.

El arenario es una carta de Arquímedes a Gelón II rey de Siracusa, en la que plantea:

Creen algunos, ¡Oh rey Gelón!, que el número de los granos de arena es infinito [...] Hay otros que juzgan no ser infinito su número, pero dicen que es imposible asignarle ninguno determinado [...] Mas comprenderás que [...] hay algunos [números] que no solo exceden al de los granos de arena que contendría toda la Tierra, sino también al de los que pudiera contener el Mundo entero (Vera, 1970: 204-205).

Para demostrar que se pueden hallar números mayores al que indicaría el número de granos de arena que llenarían el cosmos, Arquímedes plantea previamente:

1. Cómo es el universo.
2. Cuáles son sus dimensiones.
3. Cómo se pueden expresar los grandes números.
4. Cómo se puede calcular con ellos.

Para acabar encontrando un número que supera la cantidad de granos de arena que llenarían el universo.

Cómo es el universo y cuáles son sus dimensiones

Arquímedes da dos opciones sobre la composición del cosmos. En las dos el mundo es esférico, pero mientras que en una el mundo tiene por centro la Tierra y por radio la distancia de esta al Sol, en la otra, defendida por Aristarco, el centro es el Sol, la Tierra gira alrededor de él y el mundo es más grande.

Estas informaciones pueden servir para plantear varios temas en clase. Por ejemplo: ¿Por qué se preconizó que la Tierra es el centro del universo? ¿Cómo se cree ahora que es el mundo?

Dada la forma del universo, Arquímedes se plantea determinar sus dimensiones y lo hace de forma escalonada. Es importante tener en cuenta que Arquímedes no busca el número exacto de granos de arena que caben en el universo, sino demostrar que hay números mayores a esa cantidad. Por eso, en caso de duda, escoge el mayor valor y, si la cantidad no es redonda, toma una aproximación por exceso que facilite los cálculos.

1. Diámetro de la Tierra

Arquímedes propone como longitud del perímetro de la Tierra 300 miríadas de estadios.² Dice que

1. Sobre Arquímedes: Babini (1948), Dijksterhuis (1987), Strathern (1999) o Heath (2002).

2. Una miríada griega eran 10.000 unidades. Un estadio griego venía a ser unos 160 m. Su valor varió según la ciudad y la época considerada.

muchos autores consideraban que es diez veces menor, pero que él escoge esa cantidad por ser la mayor de las que se barajaban. Sobre esta cuestión se puede preguntar cuál es la longitud de un meridiano o explicar la medida del meridiano realizada por Eratóstenes.

Conocida la longitud del perímetro de la Tierra calcula su diámetro. Para ello divide la longitud de la circunferencia entre la constante π . Arquímedes toma para π el valor 3 y obtiene para el diámetro de la Tierra 100 miríadas de estadios.³ Se puede comentar que Arquímedes había obtenido la desigualdad $\frac{220}{71} < \pi < \frac{22}{7}$, pero no la utiliza para facilitar los cálculos posteriores.

2. Diámetro del Sol

Arquímedes explica que su padre, Fidias, opinaba que el diámetro del Sol es 12 veces el de la Luna, que Eudoxo decía que 9, y que Aristarco creía que está entre 18 y 20 veces el de la Luna. Él considera que el diámetro del Sol es 30 veces el de la Luna, tomando así una cantidad mayor a todas ellas. Además, como conoce el diámetro de la Tierra, y se sabía que es mayor al de la Luna, va a tomar que el diámetro del Sol es 30 veces el de la Tierra, es decir, 3.000 miríadas de estadios.⁴

3. El diámetro del cosmos geocéntrico

Arquímedes afirma que el diámetro del Sol es mayor que el lado de un polígono regular de mil lados inscrito en un círculo máximo de la esfera en la que estaban las estrellas y el Sol, límite del cosmos geocéntrico. Lo justifica diciendo que había realizado un experimento en el que había obtenido que el diámetro del Sol es mayor al lado del polígono regular de ochocientos lados y menor al del polígono de seiscientos cincuenta y seis lados inscritos en la mencionada circunferencia. Explica su experimento y discute sobre su precisión, dedicando bastante espacio a justificar geométricamente sus resultados.

Como en los cálculos anteriores redondea lo obtenido y supone que la circunferencia de las estrellas fijas es menor a 1.000 diámetros del Sol, es decir, que su longitud es menor que 30.000 diámetros de la Tierra. Tomando $\pi = 3$ de nuevo, deduce que el diámetro del cosmos es menor a una miríada de veces el diámetro de la Tierra, es decir, menor que 100 miríadas de miríadas de estadios.

4. Diámetro del cosmos de Aristarco

Según Arquímedes, Aristarco decía que el diámetro de la Tierra es a su distancia al Sol como su distancia al Sol es al diámetro del mundo, es decir, al de la esfera donde están las estrellas en la hipótesis heliocéntrica. Ha obtenido antes que el diámetro del cosmos geocéntrico es menor a una miríada de veces el diámetro de la Tierra, luego el diámetro del mundo de Aristarco sería menor a 100 miríadas de miríadas de miríadas de estadios.

Estos cálculos pueden servir para introducir una discusión sobre lo que ahora se sabe sobre la dimensión del universo, los años luz, o el Big Bang.

3. Es decir 480.000 km para el meridiano y 160.000 para el diámetro, ahora se dan 40.000 km para un meridiano, y 12.732 km de diámetro, aproximadamente.

4. Es decir 4.800.000 km, ahora se piensa que son unos 1.392.000 km.

Cómo denominar y escribir grandes números

En el lenguaje habitual suele haber problemas para enunciar grandes números, como los billones, que se superan escribiendo sus expresiones simbólicas, 10^{12} . En la antigua Grecia la cuestión era más complicada porque además de tener problemas para enunciar grandes cantidades, los tenían para escribirlas porque utilizaban un sistema de numeración bastante más torpe que el sistema decimal actual.

Hasta el siglo IV a. C. predominó entre los griegos el sistema dórico, que era similar al romano. Posteriormente se utilizó el sistema jónico, que era el que prevalecía en tiempos de Arquímedes. Era un sistema aditivo no posicional que usaba 27 letras, una para cada unidad, decena o centena. No había un símbolo para el cero. Puestas juntas el número que indicaban era la suma de sus valores. Los símbolos utilizados, junto con su valor, se pueden ver en la fig. 1:

A α 1	B β 2	Γ γ 3	Δ δ 4	E ε 5	Ϝ ϝ 6	Z ζ 7	H η 8	Θ θ 9
I ι 10	K κ 20	Λ λ 30	M μ 40	N ν 50	Ξ ξ 60	O ο 70	Π π 80	Ϟ ϟ 90
P ϙ 100	Σ σ 200	T τ 300	Υ υ 400	Φ φ 500	X χ 600	Ψ ψ 700	Ω ω 800	λ λ 900

FIGURA 1: Símbolos de la numeración jónica.

FUENTE: Cayetano (s.f.).

Si se ponía una coma a la izquierda de una cifra su valor aumentaba 1.000 veces. Por ejemplo, β indicaba el número 2 y ,β indicaba el número 2.000. Con estos símbolos podía escribirse hasta el $9.999 = ,\theta\lambda\rho\theta$. Para el diez mil se usaba el término «miríada» y el símbolo M, y para números mayores no había una regla generalizada (Ifrah, 2001: 548-550). Aristarco de Samos, por ejemplo, al dar la distancia de la Tierra al Sol, escribe 711.755.875 como 'ZPOEM'EΩOE descomponiéndolo como 'ZPOEM=7.175·10.000 y 'EΩOE=5.875. Apolonio de Perge, por su parte, escribía el número de miríadas encima de la M.

La propuesta de Arquímedes para designar grandes números

Para resolver las dificultades creadas por los grandes números en *El arenario*, Arquímedes propone una forma de denominarlos similar, pero más completa, que nuestros billones, trillones y cuatrillones, que consiste en clasificar los números en periodos y dentro de cada periodo, en órdenes.

Como se ha visto, la antigua notación griega permitía escribir números hasta una miríada, y se podía generalizar hasta una miríada de miríadas. Estos números para Arquímedes son los números primeros del primer periodo, que serían, en notación decimal, del 1 al 9.999.999 (de 1 a 10^8-1 con exponentes).

Cien millones, 10^8 , lo considera la unidad de los números segundos del primer periodo, que llegan hasta una miríada de miríadas de esa unidad, es decir, el último número segundo es $10^8 \cdot 10^8-1$. Estos números forman el segundo orden del primer periodo.

Con escritura exponencial, $10^{8 \cdot 2}$ sería la unidad del tercer orden y el último número de dicho orden sería $10^{8 \cdot 2} \cdot 10^8-1$. La unidad del cuarto orden era $10^{8 \cdot 3}$, y así seguía definiendo órdenes suce-

sivos hasta tener una miríada de miríadas de órdenes en el primer periodo, que termina con $10^{8 \cdot 10^8} - 1$.

La cantidad $P = 10^{8 \cdot 10^8}$ es la unidad del primer orden del segundo periodo. Siguiendo el mismo esquema que en el primer periodo, la unidad del segundo orden del segundo periodo es $P \cdot 10^8 = 10^{8 \cdot (10^8 + 1)}$ y la unidad del tercer orden del segundo periodo es $10^{8 \cdot (10^8 + 2)}$. De esa forma, Arquímedes define de nuevo una miríada de órdenes en el segundo periodo y sigue con un tercer periodo que tiene por unidad $10^{8 \cdot 2 \cdot 10^8}$ y luego con un cuarto periodo que empieza en $10^{8 \cdot 3 \cdot 10^8}$. Este proceso lo sigue hasta definir 10^8 periodos, llegando hasta $10^{8 \cdot 10^{16}}$ utilizando exponentes, porque de no usarlos habría que escribir un uno seguido de ochenta mil billones de ceros.

Esta cuestión puede servir para repasar el sistema decimal de numeración e introducir la notación científica.

Cómo se opera con grandes números

El sistema de numeración jónico era muy deficiente para operar por escrito. En la antigua Grecia las operaciones se hacían con ábacos, no escribiendo. Para encontrar un número superior a los granos de arena que caben en el universo, Arquímedes emplea la proporcionalidad entre esferas, por lo que, finalmente, solo necesita efectuar productos. En consecuencia, le basta con idear un método que permita calcular fácilmente productos de grandes números. Además, como busca un número mayor al número de granos de arena que caben en el universo, y no su número exacto, solo va a emplear números redondos para facilitar el cálculo. En esas condiciones, define una progresión geométrica de razón 10 y primer término 1: 1, 10, 10^2 ... Si llamamos $A_1, A_2, A_3 \dots$ a los términos de esa progresión, Arquímedes demuestra que $\frac{A_n}{A_1} = \frac{A_{m+n-1}}{A_m}$ y por lo tanto $A_m \cdot A_n = A_{m+n-1} \cdot A_1 = A_{m+n-1} \cdot 1 = A_{m+n-1}$. Por consiguiente, el producto de dos elementos de la progresión es el elemento que está en la posición suma de los lugares de los factores menos uno,⁵ y con esta regla los productos se convierten en desplazamientos entre los términos de la progresión.

Se puede relacionar este método de Arquímedes con la definición de los logaritmos decimales, porque establece una correspondencia entre la progresión geométrica de potencias de 10 y la aritmética de sus exponentes, aunque Arquímedes hace corresponder al 1, primer término de la progresión geométrica, el valor 1 y no el cero como en los logaritmos decimales.

Cálculo del número de granos de arena que caben en el mundo

Para hallar un número que supere al número de granos de arena que entrarían en el mundo, Arquímedes comienza por postular que en una semilla de amapola entran menos de una miríada de granos de arena y que cuarenta semillas de amapola alineadas miden algo más de un dedo, de donde deduce que el diámetro de una semilla no es menor que 1/40 de dedo. Por otra parte, recuerda que el volumen de las esferas es proporcional al cubo de sus diámetros.

De esos datos y aplicando dicha proporcionalidad, deduce que una esfera de un dedo de diámetro tendría menos de cuarenta al cubo miríadas de granos de arena, es decir, 640.000.000 granos. Para simplificar los cálculos dice que serían menos de 1.000.000.000, es decir, diez miríadas de miríadas o diez números del segundo orden del primer periodo, que es el término décimo, A_{10} o 10^9 , de la progresión que había definido antes.

5. Con la notación exponencial $10^{m-1} \cdot 10^{n-1} = 10^{m+n-2}$ siendo $10^{n-1} = A_n$ y $10^{m-1} = A_m$ y el resultado A_{m+n-1} .

En una esfera de 100 dedos entrarán cien al cubo veces los granos que entran en una esfera de un dedo, es decir, 1.000.000 veces los granos que entran en la de un dedo. Un millón corresponde al término A_7 de la progresión, y utilizando la regla obtenida para el producto entre términos de la progresión, obtiene que $A_7 \cdot A_{10} = A_{7+10-1} = A_{16}$. El término 16 de la progresión es mil miríadas de números segundos. Con los procedimientos actuales trabajando con potencias estos cálculos son triviales: $10^9 \cdot 10^6 = 10^{15}$. Pero sin la facilidad de nuestra notación no era tan sencillo, Arquímedes, en *El arenario*, expone verbalmente todo este proceso y se alarga mucho.⁶

Sigue con una esfera de una miriada de dedos de diámetro, que tiene un diámetro cien veces mayor a la de cien dedos, por lo tanto, la cantidad de granos de la nueva esfera debe ser un millón de veces mayor al de la anterior. Esas cantidades son los términos A_7 y A_{16} de la progresión, y el resultado de su producto es el término A_{22} , diez miríadas de números terceros.

Una esfera que tiene un estadio de diámetro es menor que una que tiene una miriada de dedos de diámetro, porque un estadio griego tenía 600 pies y un pie 16 dedos, por lo que un estadio tenía 9.600 dedos de largo, es decir, menos de 10.000 dedos. Luego si en una esfera mayor caben menos de diez miríadas de números terceros de granos de arena, en una esfera de un estadio de diámetro también cabrán menos de esa cantidad.

Arquímedes continúa el cálculo con estadios. Una esfera de 100 estadios tendría cien miríadas de veces, A_7 , los granos que tendría la de un estadio, que son diez miríadas de números terceros, A_{22} , por lo que tendría menos del término 28 de la progresión, mil números cuartos de granos de arena. De la misma forma, obtiene que una esfera de una miriada de estadios de diámetro tendría menos de diez números quintos de granos de arena que una de cien miríadas de estadios menos de mil miríadas de números quintos, y una de una miriada de miríadas de estadios de diámetro, menos que diez miríadas de números sextos. Finalmente, para cien miríadas de miríadas de estadios de diámetro, entrarían menos de mil números séptimos de granos de arena [$A_7 \cdot A_{46} = A_{52}$ ó $10^6 \cdot 10^{45} = 10^{51}$]. Pero había obtenido que el diámetro del cosmos geocéntrico es menor que cien miríadas de miríadas de estadios, luego el número de granos de arena que entrarían en el cosmos sería menos de mil números séptimos. Es decir, con la notación decimal, un 1 seguido de 51 ceros.

Añade Arquímedes que, en el caso de que el universo fuera como proponía Aristarco, su diámetro sería una miriada de veces mayor al del cosmos geocéntrico. Luego su volumen sería una miriada de miríadas de miríadas de veces el volumen anterior y el número de granos que entrarían serían menos de una miriada de miríadas de miríadas de veces mil números séptimos de granos de arena [$10^{12} \cdot 10^{51} = 10^{63}$], es decir, tendría menos de mil miríadas de números octavos de granos de arena, que en cifras decimales se escribiría como el 1 seguido de 63 ceros.

Para acabar, se podría proponer hacer ese cálculo con los datos actuales. Supuesto el radio del mundo igual al del mundo observable, esto es $R \approx 4,4 \cdot 10^{26}$ metros y la densidad de los granos de arena: $8 \cdot 10^9$ granos/ m^3 , se tendría que el volumen del mundo conocido $\approx 3,45 \cdot 10^{80} m^3$ y el número de granos de arena $\approx 2,76 \cdot 10^{90}$. Mayor cantidad que la encontrada por Arquímedes, pero también numerable.

6. En Peyrard (1807: 357-367) son 10 páginas de las 19 que abarca todo el texto. En Vera (1970: 216-217) o Heath (2002: 230-232) son solo dos o tres porque lo abrevian y usan notación moderna.

Referencias bibliográficas

- BABINI, José (1948). *Arquímedes*. 2ª ed. Buenos Aires: Espasa Calpe.
- CAYETANO, Javier (s. f.). «Numeración griega jónica». *Rincón didáctico matemáticas* [en línea]. Consejería de Educación y Empleo. Junta de Extremadura. <<https://matematicas.educarex.es/index.php/numeros1eso/unidades-numeros-1eso/num-griego-jonico?s=09>> [Consulta: 10 febrero 2024].
- DIJKSTERHUIS, Eduard Jan (1987). *Archimedes*. Princeton: Princeton University Press.
- HEATH, Thomas Little (2002). «The Sand-reckoner» (El Arenario). En: *The Works of Archimedes*. New York: Dover Publications, p. 221-232.
- IFRAH, Georges (2001). *Historia universal de las cifras*. 4ª ed. Madrid: Espasa Calpe.
- PEYRARD François (1807). «L'Arénaire». En: *Oeuvres d'Archimède*. París: François Buisson, p. 348-367.
- STRATHERN, Paul (1999). *Arquímedes y la palanca*. Madrid: Siglo Veintiuno.
- VERA, Francisco (1970). «El Arenario». En: *Científicos Griegos*. Vol. 2. Madrid: Aguilar, p. 204-217.

LIBRO DE ALGEBRA EN ARITHMETICA Y GEOMETRIA, UN LLIBRE DE TEXT DEL SEGLE XVI¹

IOLANDA GUEVARA-CASANOVA;¹ FÀTIMA ROMERO-VALLHONESTA;² MARIA ROSA MASSA-ESTEVE³

¹ DEPARTAMENT D'EDUCACIÓ I DEP. DID. MATEMÀTIQUES I CIÈNCIES EXPERIMENTALS. UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA

² CENTRE DE RECERCA PER A LA HISTÒRIA DE LA TÈCNICA. UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

³ DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES I CENTRE DE RECERCA PER A LA HISTÒRIA DE LA TÈCNICA. UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Resum: En aquest article presentem el Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria (1567) de Pedro Núñez (1502-1578). Expliquem l'estructura de l'obra i analitzem algunes de les novetats que l'autor inclou en relació amb els tractats de l'època. Un dels principals objectius que té l'autor en l'obra és convèncer el lector de la importància d'aprendre àlgebra perquè és una eina molt útil per resoldre problemes tant aritmètics com geomètrics. Aquesta transició entre el pensament geomètric i l'àlgebraic també es dona en l'educació matemàtica actual. Així, l'estudi d'aquest autor i del seu mètode permet dissenyar activitats d'aula que poden ajudar a entendre aquesta transició. En aquest sentit, la història de les matemàtiques té una doble vessant, és un bon recurs per al disseny de situacions d'aprenentatge i a la vegada és una font de coneixement per al professorat que li permet entendre millor les dificultats de l'alumnat en l'abstracció que comporta l'aprenentatge de l'àlgebra.

Paraules clau: aprenentatge de les matemàtiques, àlgebra, aritmètica, geometria, textos històrics.

Libro de algebra en arithmetica y geometria, a 16th century text book

Summary: In this article we present the Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria (1567) by Pedro Núñez (1502-1578). We explain the structure of the work and analyse some of the novelties that the author includes in relation to the treatises of the time. One of the main objectives of the

1. Aquest treball s'inclou en el projecte PID2020-113702RB-I00 del Ministeri de Ciència i Innovació espanyol.

work is to convince the reader of the importance of learning algebra because it is a very useful tool for solving both arithmetic and geometric problems. This transition between geometric and algebraic thinking also occurs in current mathematics education. Thus, the study of this author and his method makes it possible to design classroom activities that can help to understand this transition. In this sense, the history of mathematics has a dual-purpose, it is a good resource for the design of situations of learning, and, at the same time, it is a source of knowledge for teachers that allows them to understand better the students' difficulties in the abstraction involved in learning algebra.

Keywords: learning mathematics, algebra, arithmetic, geometry, historical texts.

Context

En la segona meitat del segle XVI van començar a aparèixer tractats dedicats a difondre les regles bàsiques de l'àlgebra, que, a poc a poc, va anar deixant de ser concebuda només com una eina de resolució de problemes per esdevenir un objecte d'estudi per ella mateixa. L'àlgebra va començar a ser considerada per alguns matemàtics com una branca de les matemàtiques a partir de la difusió de l'obra *In Artem Analyticen Isagoge* (1591) de François Viète (1540-1603).

Els primers tractats espanyols amb contingut algebraic van aparèixer en forma de capítols d'aritmètiques, com a la majoria dels primers tractats europeus. Aquests textos contrastaven de manera explícita l'*art major* o àlgebra amb l'*art menor*, tal com s'anomenava sovint l'aritmètica. Les obres amb contingut algebraic publicades a la península Ibèrica al segle XVI, totes elles a la segona meitat, van ser: el *Libro primero de Arithmetica Algebraica* (1552) de Marco Aurel, el *Compendio de la Regla de la Cosa* (1558) de Juan Pérez de Moya, l'*Arithmetica práctica y speculativa* (1562) del mateix autor, l'*Arithmetica* (1564) d'Antic Roca i el *Libro de Algebra* (1567) de Pedro Núñez, que és el que tractarem a continuació i que considerem que té un gran valor pedagògic.² De fet, la lectura d'aquesta obra pot suggerir materials per tal que el professorat pugui dissenyar activitats en les quals l'alumnat connecti l'àlgebra amb la geometria. Si bé aquestes connexions s'han promogut des de fa anys en l'educació matemàtica (Guevara-Casanova, 2018), actualment queden recollides en el *Decret 175/2022, de 27 de setembre, d'ordenació dels ensenyaments de l'educació bàsica*, tant en les competències específiques de les matemàtiques de primària com de secundària.³

L'autor

Pedro Núñez (1502-1578) va ser un matemàtic portuguès, que és considerat per alguns historiadors una de les figures més assenyalades de la ciència del Renaixement portuguès. Tot i que la seva obra abasta diferents camps del coneixement, prima la producció científica i tècnica sobre la qual es podria considerar més literària. De fet, Núñez va dedicar una gran part de la seva activitat intel·lectual a la fonamentació científica de la navegació. Núñez va néixer el 1502 a Alcácer do Sal. És per aquest motiu que va afegir el gentilici *salaciense* al seu nom en la majoria dels seus textos impresos.

Alguns aspectes de la seva biografia es coneixen pels interrogatoris a què van ser sotmesos els seus nets durant els processos inquisitorials.⁴ Va cursar estudis introductoris de medicina a la

2. Per més informació, vegeu Romero-Vallhonesta (2022) i sobre les fonts de l'Art Major a la península Ibèrica: Romero-Vallhonesta et al. (2018).

3. Competència específica 5 de l'ESO: «Connectar diferents elements matemàtics relacionant conceptes, procediments, arguments i models per desenvolupar una visió de les matemàtiques com un tot integrat» (Decret 175/2022).

4. Més informació sobre l'autor a Leitão (2010).

Universitat de Salamanca, estudis que solien emprendre habitualment els qui estaven interessats per temes científics. Cap a 1534, segons l'autor manifesta, podria haver començat a escriure el *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria* (d'ara endavant, *Libro de Algebra*), probablement en la seva estada a Salamanca, però que no publicaria fins a 1567. Amb aquesta obra, Núñez volia reivindicar l'àlgebra en una època en què havia de fer-se lloc entre una aritmètica i una geometria ja consolidades.

El Libro de Algebra

L'àlgebra de Núñez té una estructura complexa. Es tracta d'una obra molt extensa i molt diferent de les àlgebres d'Aurel, Pérez de Moya i Roca. L'interval que hi ha des que es va començar a escriure fins que va ser publicada fa que sigui també molt difícil d'analitzar (Bosmans, 1908).

L'obra comença amb una carta en portuguès dedicada al cardenal i infant don Enrique, en la qual Núñez explica per què escriu l'obra i cita alguns dels seus autors de referència. Aquí l'autor deixa clara la seva intenció d'escriure un treball pràctic, sense teoria prèvia, a la qual considera que s'ha de dedicar massa temps, i amb molts exercicis, perquè no calgui l'ajuda d'un expert per tal que s'entengui. Així, sabem quin era l'objectiu de l'obra i a qui anava dirigida:

Per això, veient com és d'utilitat per als homes aquest art que s'ocupa dels nombres i de les mesures, vaig pretendre en aquesta obra que sense precedir la doctrina de la ciència especulativa, en la qual es dedica més temps, la poguessin aprendre per ells mateixos i en poc temps i fàcilment sense més ajuda d'un mestre. Perquè les demostracions que porto en aquest llibre que necessiten altres principis són més per satisfer als qui dubten de les regles —sense estar satisfets amb les altres proves— i per a la perfecció d'aquesta obra més que per a l'execució del que volem saber. I perquè en totes les arts l'exercici és la part principal, per conèixer millor aquest art, he triat molts i molts casos en Aritmètica i Geometria, que es practiquen per les regles que portem amb els seus discursos demostratius (Núñez, 1567, p. II-III).⁵

La primera part principal consta de sis capítols que tracten sobre la finalitat de l'àlgebra, les seves regles i *conjugacions*, que és com Núñez anomena les equacions, i sobre les demostracions de les regles de les *conjugacions simples* i *compostes* i els casos particulars. La segona part principal té tres subdivisions, la primera de les quals té 11 capítols on l'autor declara les incògnites que anomena *dignidades* i explica com operar-hi. La segona subdivisió d'aquesta segona part principal consta de 12 capítols dedicats a les operacions amb arrels. Núñez dedica els 14 primers capítols de la tercera subdivisió a la teoria de les proporcions i el darrer, a les arrels dels binomis, tot i que l'autor es refereix a tots 15 capítols com a *la teoria de les proporcions*. La tercera part principal de l'obra és la més extensa i desenvolupa la resolució d'equacions que havia tractat a la primera part, i ho fa d'una manera molt més completa. Consta de set capítols, cinc dels quals tenen un caràcter més aviat teòric i dos d'ells exemplifiquen l'aplicació de l'àlgebra a l'aritmètica i a la geometria. Per tancar el tractat, Núñez escriu una carta als lectors enumerant els llibres d'àlgebra que han arribat a Espanya fins al moment i cita tres autors: Fray Lucas de Burgo, Hieronymo Cardano i Nicolo Tartalla. Després explica les millores que aporta a les obres d'aquests autors i, finalment, demana disculpes per no haver tractat l'equació cúbica.

5. La traducció del portuguès és de les autores

Primera part principal i tercera part principal

A la primera part principal, Núñez estableix els sis tipus d'equacions (vegeu la fig. 1) i després demostra les regles per resoldre-les.

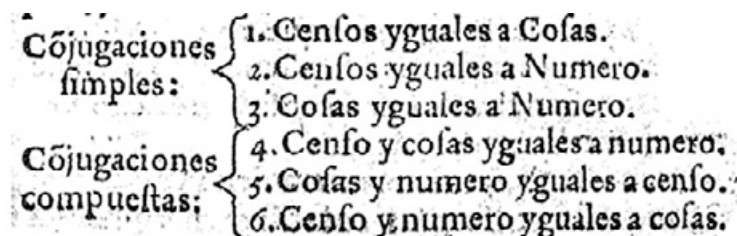


FIGURA 1. Els diferents tipus d'equacions segons Núñez.

FONT: Núñez (1567, p.1v).

Que en el llenguatge actual s'escriurien:

- | | |
|---------------|-------------------|
| 1. $x^2 = bx$ | 4. $x^2 + bx = c$ |
| 2. $x^2 = c$ | 5. $bx + c = x^2$ |
| 3. $bx = c$ | 6. $x^2 + c = bx$ |

Un cop introduïdes a la primera part, més endavant utilitza abreuïjaments: *co* per *cosa* (x), *ce* per *censos* (x^2), així com d'altres per als termes de grau més elevat.

Les demostracions de les regles per resoldre les equacions, les fa Núñez de dues maneres a partir de construccions geomètriques. Primer, constatant que una determinada longitud verifica les condicions de l'equació; després, construint el segment que compleix l'equació. El motiu per fer-ho de dues maneres és per evitar crítiques, tal com el mateix autor manifesta, en el sentit que en la primera demostració se suposa implícitament que existeix solució i en la segona, en canvi, queda clar que la solució existeix perquè s'ha pogut construir. Cal afegir que és un dels primers, i a més n'és conscient, que es planteja canviar la justificació geomètrica basada en les proposicions de relacions entre quadrats i rectangles del llibre II dels *Elements* d'Euclides⁶ per procediments algebraics. En paraules de l'autor:

Mas estas demostraciones de las tres reglas postreras puesto que sean muy claras, podra el adversario impedir, diciendo, que en la demostracion de la primera presuponemos, que un censo con las cosas en qualquier numero que ellas sean, pueden ser yguales a qualquier numero, tomado numero como avemos definido en principio de este libro y que este presupuesto. Por lo qual sera necessario demostrarlo (Núñez, 1567, 14r).

En la tercera part principal del tractat, Núñez afegeix una tercera demostració de les regles de manera que serveixi per a tots els nombres, ja que en la primera part només havia considerat el cas en què els coeficients del terme de primer grau són parells. Han passat els anys, s'ha publicat l'*Ars Magna* de Cardano (1545) i Núñez vol millorar el seu tractat.

Des del punt de vista de l'educació matemàtica i de les competències que ha d'assolir l'alumnat, pensem que aquestes demostracions de les regles per a resoldre equacions a través de la geometria

6. Per consultar les proposicions dels *Elements* d'Euclides hem utilitzat Heath (1956).

són una bona font per a plantejar activitats d'aula on l'alumnat pugui establir connexions, en aquest cas entre la geometria i l'àlgebra (competència específica 5 del currículum actual de matemàtiques). Així, de les tres demostracions de cada regla, considerem la primera com la més adient per l'alumnat actual de l'educació secundària obligatòria. La demostració de la primera regla de les compostes està desenvolupada en Massa-Esteve (2010: 111-118). Per aquesta raó, aquesta demostració juntament amb alguns dels problemes sobre triangles són els elements que vam triar per dissenyar unes activitats adreçades a l'alumnat de tercer de l'ESO, el curs 2021-2022, que vam presentar en un taller a l'ESU-9 2022,⁷ publicat a les actes corresponents (Romero-Vallhonestà *et al.*, 2023: 400-410).

Problema 45, cap. 7, tercera part principal (1567, p.269v- 270r)

Aquest és un dels problemes sobre triangles que Núñez resol amb la intenció de millorar les resolucions que ja havia fet Regiomontanus⁸ en el llibre II, Teorema 14, de la seva obra *De Triangulis Omnimodis* (1464).⁹ El resol amb àlgebra i sense àlgebra. Comença amb àlgebra perquè, segons ell, és el mètode que permet resoldre tot tipus de problemes i s'entenen els passos que es fan, i després el resol sense àlgebra. L'enunciat: «Si la suma de los dos lados del triangulo fuere conocida, y las partes de la base, que por la perpendicular se apartan, fueren conocidas, cada uno de los lados sera por si conocido, y la area y la perpendicular» (Núñez, 1567: 269r). No considera una figura diferent per a cada problema, sinó que utilitza un mateix dibuix per a diferents problemes. La figura 2 correspon al problema 43 i és el mateix triangle sobre el qual treballa en els problemes 44 i 45.

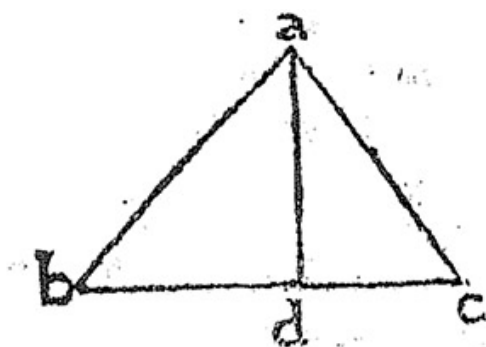


FIGURA 2. Il·lustració del problema 43.

FONT: Núñez (1567, p. 268r).

Després de l'enunciat, dona dades concretes i el resol per àlgebra, tot en redactat retòric i explicatiu (vegeu la fig. 3)

7. 9th European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education.

8. Regiomontanus o Juan de Montenegro és com es refereixen sovint els autors a Johann Müller (1436-1476), qui va fer importants contribucions a la trigonometria i a l'astronomia.

9. Es va imprimir per primera vegada l'any 1533 i posteriorment el 1561, tot i que es coneixia per via manuscrita en el cercle de matemàtics de Nuremberg. Sobre les connexions entre l'obra de Núñez i la de Regiomontanus podeu llegir: Guevara-Casanova *et al.* (2003) i Guevara-Casanova *et al.* (2005).

45. Si la suma de los dos lados del triangulo fuere conocida, y las partes de la base, que por la perpendicular se apartan, fueren conocidas, cada uno de los lados sera por si conocido, y la area, y la perpendicular. Sea en el mismo triangulo a b c. la suma de los dos lados a b, y a c. 27. y sea b d $8\frac{3}{5}$. y d c, $6\frac{1}{5}$. para que conoscamos cada uno de los lados por si, ponemos el lado a b, fer

l iij 1 co,

1 co. y sera por tanto a c. 27. m. i co. sacaremos de 1 ce. quadrado de a b. $70\frac{14}{25}$, quadrado de b d. y quedara 1 ce. m. $70\frac{14}{25}$. y esto sera el quadrado de la perpendicular a d. Item, sacaremos $43\frac{14}{25}$, quadrado de d c, del quadrado de a c. el qual es 729. p. 1 ce. m. 54 co. y quedaran $685\frac{14}{25}$. p. 1 ce. m. 54 co. y esto sera tambien el quadrado de la perpendicular a d. Yguales seran por tanto 1 ce. m. $70\frac{14}{25}$. y $685\frac{14}{25}$ p. 1 ce. m. 54 co. Ygualesmos dando a ambas las quantidades $70\frac{14}{25}$. y las 54 co. y sacando despues 1 ce. y por fin de la yguacion, quedara yguales 54 co. y el numero 756, que es conjugacion simple. Partiremos 756, por 54. y sera el quociente 14. y este sera el valor de vna cosa, y tanto sera el lado a b. y porq̃ la suma de los dos lados era 27. sera luego el lado a c, 13. la perpendicular, y la area, sabremos por el modo acostumbrado.

FIGURA 3a i 3b. Resolució per àlgebra del problema 45.

FONT: Núñez (1567, p. 269r).

Reproduïrem a continuació la resolució utilitzant la notació actual. Les dades del problema:

$$ab + ac = 27$$

$$bd = 8\frac{3}{5}$$

$$dc = 6\frac{1}{5}$$

Resolució:

«El lado ab sera co», en paraules de Núñez. Nosaltres farem, $ab = x$, i $ac = 27 - x$

A continuació, Núñez fa una sèrie d'afirmacions relatives als quadrats de longituds de costats i de segments del triangle,¹⁰ per una banda:

$$(ab)^2 - (bd)^2 = x^2 - (8\frac{3}{5})^2 = x^2 - (70\frac{14}{25}) = (ad)^2$$

I per l'altra:

$$(ac)^2 - (dc)^2 = (27 - x)^2 - (6\frac{1}{5})^2 = (ad)^2$$

$$(ac)^2 - (dc)^2 = 729 - 54x + x^2 - (43\frac{14}{25})$$

El que fa Núñez a continuació és igualar les dues expressions de $(ad)^2$ i obté l'equació següent:

$x^2 - (70\frac{14}{25}) = 729 - 54x + x^2 - (43\frac{14}{25})$. Després, tal com diu Núñez, «sacando a ambas 1 ce (un censo, o sigui x^2) y dando a ambas $70\frac{14}{25}$, quedan iguales 54 co y el numero 756»,¹¹ s'arriba a:

$54x = 756$, «que es conjugacion simple» i resol dividint 756 entre 54, és a dir que $x = 14 = ab$, $ac = 27 - 14 = 13$.

A continuació, el mateix Núñez diu que es pot fer sense àlgebra (vegeu la fig. 4). Explica les

10. Les igualtats es compleixen perquè el triangle ha quedat dividit en dos triangles rectangles. Per tant, està aplicant el teorema de Pitàgores.

11. $729 - 43 - 14/25 + 70 + 14/25 = 756$

operacions que cal fer amb les dades, que reproduïm en notació actual.

Por otro modo podremos fin Algebra conocer quanto sea cada vno de los lados. De $8\frac{2}{5}$, sacando $6\frac{3}{5}$, quedaran $1\frac{4}{5}$, y esto multiplicado por la base, que es 15, haze 27. estos 27 partiremos por la suma de los lados, que en este caso también es 27. y verna 1. y este 1, sera el exceso del lado mayor sobre el menor. Sacando pues este 1, de la suma de los lados, la qual es 27, quedaran 26. cuya mitad, que es 13, sera el lado menor, y 13. cõ 1. que son 14, sera el lado mayor. La demonstraciõ desta Regla hallaras en la proposicion. 14. del segundo libro de los triangulos de Iuan de Montenegro, entiẽde la bien. Mas la causa porq̃ obro por Algebra quasi siempre, es que este tratado es hecho para que en el se practiquen las Reglas de

FIGURA 4. Resolució sense àlgebra del problema 45.
FONT: Núñez (1567, p. 268v).

Les dades:

$$ab + ac = 27$$

$$bd = 8\frac{2}{5}$$

$$dc = 6\frac{3}{5}$$

Els càlculs que fa Núñez:

$$bd - dc = 8\frac{2}{5} - 6\frac{3}{5} = 1\frac{4}{5}$$

$$bd + dc = 8\frac{2}{5} + 6\frac{3}{5} = 15$$

$$(bd - dc)(bd + dc) = 1\frac{4}{5} \cdot 15 = 15 + 60/5 = 15 + 12 = 27$$

Que divideix per la suma dels costats, que també és 27 i li dona 1, que diu que és la diferència entre els costats ($ab - ac$), i com que té la suma ($ab + bc = 27$) pot operar i trobar ab i bc .

Està fent servir la igualtat: $(bd)^2 - (dc)^2 = (ab)^2 - (ac)^2$, però aquesta igualtat no és evident. Ell mateix diu que la demostra Regiomontanus, a la Proposició 14 del llibre II de l'obra *De triangulis omnimodis*.

Regiomontanus remet al seu Teorema 17 del llibre I, que consisteix en l'aplicació del teorema de Pitàgores als dos triangles rectangles en què l'inicial queda dividit per l'altura:

$$(bd)^2 + (ad)^2 = (ab)^2$$

$$(dc)^2 + (ad)^2 = (ac)^2$$

Si restem les dues igualtats, s'obté la igualtat: $(bd)^2 - (dc)^2 = (ab)^2 - (ac)^2$

I continua dient Núñez que ho fa amb àlgebra perquè ajuda a la demostració i a entendre el raonament:

Mas la causa porque obro por Algebra casi siempre, es que este tratado es hecho para que se practiquen las reglas de Algebra en los casos de Geometria. Y tambien porque quien obra por Algebra va entendiendo la razon de la obra que hace, hasta la yqualacion ser acabada. Y siendo hecha, queda en alguna de las sobredichas conjugaciones, las quales tienen sus Reglas. De suerte, que quien obra por Algebra, va haciendo discursos demostrativos. Pero el que obra por otras Reglas, como es la Regla por la qual resolveremos este caso 45, sacado del dicho libro de Juan de Montereio, no entienden de luego la razon de la obra que va haziendo, y para poner la razon, la cual es diferente en diferentes casos, seria necesario usar de muchas y varias proposiciones de Euclides. Y esto se escusa con las reglas de Algebra, porque por ellas demostramos todos los casos, sin aver necesidad de otras proposiciones de Euclides: porque nos basta para los casos de Geometria, la proposicion 47 del primero de Euclides, que es el invento Pithagorico, con algunos faciles documentos (Nuñez, 1567: 269r-270v).

I a continuació, encara ofereix una altra manera de resoldre-ho sense àlgebra i diu que l'ha tret de la mateixa obra (Juan de Montereio).

Fa una sèrie de càlculs amb les dades que té:

$$\begin{aligned} (ab + ac)^2 &= 27^2 = 729 & bd &= 8 \frac{3}{5} & (bd)^2 &= 70 \frac{14}{25} \\ dc &= 6 \frac{3}{5} & (dc)^2 &= 43 \frac{14}{25} \\ (bd)^2 - (dc)^2 &= 27 \end{aligned}$$

I utilitzant la igualtat següent:

$$\frac{(ab + ac)^2 + (bd)^2 - (dc)^2}{2(ab + ac)} = ab$$

obté: $\frac{729 + 27}{54} = \frac{756}{54} = 14 = ab$ i, per tant, $ac = 13$.

A continuació, l'autor torna fer tota una dissertació sobre l'ús de l'àlgebra:

Pero obrando por este modo, y encobriendo el artificio, no se engendra ciencia, y por esta causa aplaze mas este arte de Algebra, la cual puesto que sea practica, van pero en ella las operaciones siguiendo las demostraciones. De manera, que quien sabe por Algebra sabe cientificamente (Nuñez, 1567: 270r).

Després d'aquesta dissertació, explica que el problema següent, el 46, també el va resoldre Montereio (Llibre II, Teorema 12) i el mateix Montereio va dir que només el sabia resoldre per àlgebra (vegeu la fig. 5). Núñez també el resol només per àlgebra, però amb algunes diferències: les dades numèriques són una mica diferents, també és diferent sobre quina part del triangle situa la incògnita i el tipus d'equació de segon grau on arriba, de les tres compostes que també utilitza Montereio.

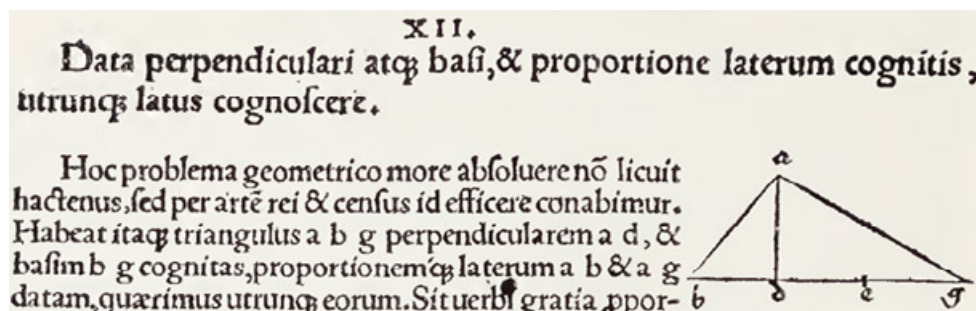


FIGURA 5. Regiomontanus diu que resol el problema per «arte rei & census».

FONT: Müller (1464, p. 51).

Consideracions finals

El *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria*, obra d'un dels matemàtics més rellevants de la península Ibèrica del segle XVI, pot ser una bona font d'inspiració per triar problemes per a l'aula en què la geometria és el context per introduir l'àlgebra, i viceversa, i també per veure com un mateix problema es pot resoldre amb o sense àlgebra.

Podem iniciar el treball amb els estudiants parlant de la figura d'un matemàtic tan rellevant com Pedro Núñez o encarregar-los un petit treball sobre el personatge. A partir d'això, és interessant recordar alguns teoremes relacionats amb la geometria que de vegades no es tracten a les aules, sovint per una introducció prematura de l'àlgebra. D'aquesta manera es poden proporcionar eines perquè l'alumnat s'adoni que un problema es pot resoldre per diferents vies i així pugui avaluar els punts forts i els punts febles de fer-ho d'una manera o d'una altra.

El *Libro de Algebra* també té interès perquè els enunciats dels problemes els poden llegir els alumnes directament del text, ja que la llengua castellana del segle XVI no difereix de l'actual en allò que és essencial. En alguns problemes, cal donar-ne pautes per a la resolució, però en altres, els alumnes poden intentar resoldre'ls directament.

Referències bibliogràfiques

- BOSMANS, Henri (1908). «L'algèbre de Pedro Nuñez». *Annaes Scientificos da Academia Polytechnica do Porto*, 3, p. 222-271.
- CARDANO, Gerolamo (1545). *Ars Magna*. Nürenberg: Johann Petreius. Traducció a l'anglès de Witmer, R. T. (1968). M.I.T. Cambridge, reimprès per Dover, New York, (1993).
- «Decret 175/2022, de 27 de setembre, d'ordenació dels ensenyaments de l'educació bàsica» (2022). *Diari Oficial de la Generalitat de Catalunya*, núm. 8762 (29 setembre).
- GUEVARA-CASANOVA, Iolanda; CASALS-PUIT, Maria Àngels (2003). «Resolució de triangles per mètodes geomètrics i mètodes algebraics, en l'obra de *Triangulis Omnimodis* (1464) de Regiomontanus (1436-1476)». A: BATLLÓ, Josep; BERNAT, Pasqual; PUIG, Roser (eds.). *Actes de la VII Trobada d'Història de la Ciència i de la Tècnica*. Barcelona: IEC - Societat Catalana d'Història de la Ciència i de la Tècnica, p. 191-199. Disponible en línia a: <https://books.google.es/books?id=S8yjiov7j-UC&printsec=frontcover&hl=es&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false>.
- GUEVARA-CASANOVA, Iolanda; MASSA-ESTEVE, Maria Rosa (2005). «Mètodes algebraics a l'obra de Regiomontanus (1436-1476)». *Biaix*, 24, p. 27-34.
- GUEVARA-CASANOVA, Iolanda; BURGUÉS-FLAMARICH, Carme (2018). «Geometry and Visual Reasoning: Introducing Algebraic Language in the Manner of Liu Hui and al-Khwarizmi». A: CLARK, Kathleen [et al.] (eds.). *Mathematics, Education and History*. ICME-13 Monographs, <https://doi.org/10.1007/978-3-319-73924-3>. Springer International Publishing AG, part of Springer Nature 2018.
- HEATH, Thomas L. (ed.) (1956). *Euclid. The Thirteen Books of The Elements*. Nova York: Dover.
- LEITÃO, Henrique (2010). «Pedro Nunes e o Livro de Algebra». *Quaderns d'Història de l'Enginyeria*, XI, p. 9-18.
- MASSA-ESTEVE, Maria Rosa (2010). «Àlgebra i Geometria al Libro de Álgebra en Arithmetica y Geometria (1567) de Pedro Nuñez». *Quaderns d'Història de l'Enginyeria*, 11, p. 101-125.
- MÜLLER, John (1464). De *Triangulis Omnimodis*. Traducció de Barnabas Hughes (1967). *Regiomontanus on triangles*. De *triangulis omnimodis* by Johan Müller. Madison: University of Wisconsin Press.
- NÚÑEZ, Pedro (1567). *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria*. Anvers: En casa de los Herederos de Arnoldo Birckman a la Gallina Gorda.
- PACIOLI, Luca (1494). *Summa de Arithmetica, Geometria, proportioni et Proportionalita*. Venezia: Paganino de Paganini.
- ROMERO-VALLHONESTA, Fàtima; MASSA-ESTEVE, Maria Rosa (2018). «The main sources for the Arte Mayor in sixteenth century Spain». *BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics*, 33. <<http://dx.doi.org/10.1080/17498430.2017.1419704>>.
- ROMERO-VALLHONESTA, Fàtima (2022). «La introducción del álgebra en la Península Ibérica». *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 5 (3), p. 577-594.
- ROMERO-VALLHONESTA, Fàtima; GUEVARA-CASANOVA, Iolanda; PUIG-PLA, Carles (2023). «Pedro Núñez: Algebra is also for geometrical problem solving». A: BARBIN, Évelyne [et al.] (eds.). *History and Epistemology in Mathematics Education: Proceedings of the 9th ESU*. Roma: Edizioni Nuova Cultura, p. 400-410.

GEOMETRIA ANALÍTICA PER RECOSIR CONNEXIONS A BATXILLERAT

DAVID VIRGILI CORREAS

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
ESCOLA GALÍ BELLESGUARD (BARCELONA)

Resum: El currículum català actual de matemàtiques de batxillerat (16-18 anys) emfasitza la necessitat de contextualitzar els conceptes matemàtics que s'ensenyen en aquesta etapa. Mal interpretat, això podria portar a la mera aplicació de tècniques analítiques per a resoldre únicament problemes més simples i quotidians. La incorporació d'elements històrics a l'aula ofereix una aproximació diferent a la contextualització, i serveix per desafiar la percepció comú entre els estudiants d'aquesta franja d'edat de veure les matemàtiques com a conjunt fragmentat de resultats aïllats que s'acumulen al llarg del temps. Aquest article presenta una activitat històrica duta a terme amb estudiants de batxillerat de l'Escola Galí Bellesguard de Barcelona, centrada en dues aproximacions diferents per a resoldre un mateix problema geomètric, fetes per Ghetaldi (1607) i Omerique (1698). L'activitat comprèn una part experimental, que vam dur a terme amb Geogebra, i una de teòrica, que requeria l'anàlisi de fragments seleccionats de les fonts originals. L'objectiu principal de l'activitat és ajudar els estudiants a establir connexions internes entre la resolució geomètrica i l'analítica de sistemes d'equacions; això s'ha tractat prèviament per a sistemes lineals a 3r d'ESO, però des d'aleshores no s'ha tornat a tractar per als casos no lineals.

Paraules clau: Història de les matemàtiques, Didàctica de les matemàtiques, Geometria.

Analytic geometry to sew up connections in Batxillerat

Summary: The current Catalan curriculum for mathematics at the Batxillerat level (16-18 years) emphasizes the necessity to contextualize the mathematical concepts taught at this stage. However, this may lead to the mere application of analytic techniques to solve only simpler everyday problems. The incorporation of historical elements into the classroom offers a distinctive approach to contextualization, and is useful to challenge the prevalent perception among students at this age of mathematics as a fragmented set of isolated results which accumulate over time. This article presents a historical activity carried out with Batxillerat students of Escola Galí Bellesguard from Barcelona, centered in two different approaches to solve the same geometrical problem, by Ghetaldi (1607) and Omerique (1698). The activity comprises an experimental part, which we carried out with Geogebra, and a theoretical one, which requires an analysis of selected passages of the original sources. The primary objective of the activity is to help students in establishing in-

ternal connections between the geometrical and algebraic resolution of systems of equations; this has been previously addressed for linear systems at 3rd ESO, but it has since then been overlooked for non-linear cases.

Keywords: History of mathematics, Didactics of mathematics, Geometry.

Motivació de la proposta

El currículum de matemàtiques per a l'ESO de Catalunya (175/2022) suggereix nombrosos exemples de contextos històrics rics per treballar a l'aula els continguts propis de l'etapa, com per exemple la introducció del zero i els negatius al llarg de la història (Romero *et al.*, 2021), l'ús de les fraccions a l'antic Egipte (Bonet i Matas, 2017) o el càlcul de distàncies astronòmiques per proporcionalitat amb Aristarc de Samos (Massa-Esteve, 2005). A l'etapa de batxillerat, però, el plantejament canvia de so-ca-rel i es troben només dues referències escadusseres a la història de la matèria: en introduir els complexos es considera convenient parlar de les solucions a les equacions polinòmiques, i en tractar el sentit socioafectiu, es demana al professorat que desperti en l'alumne l'estima pel «paper de matemàtics i matemàtiques al llarg de la història en múltiples aspectes que ens envolten, tant de l'àmbit artístic com cultural, social, científic i tecnològic».

Aquest oblit de la història contrasta amb l'èmfasi exagerat que rep la necessitat de contextualitzar, una paraula que es repeteix 49 vegades en un document de només 22 pàgines: una crossa que acompanya cada nova introducció d'un contingut, i que sembla indicar que la paraula «context» s'entén únicament com a exhortació a l'aplicabilitat pràctica del temari. A l'hora de revisar aquest currículum de batxillerat (171/2022), caldria incorporar-hi altres perspectives menys utilitaristes de les matemàtiques i tenir en compte també els nombrosos avantatges que aporta als alumnes l'ús del propi desenvolupament històric dels conceptes com a context de treball.

Fer servir la història de les matemàtiques a l'aula té nombrosos avantatges tant per al professor com per a l'alumnat, com ha estat reivindicant des de fa dècades el GRHCT de la UPC o el Grup d'Història d'ABEAM (Massa-Esteve, 2003). No es tracta tan sols d'aconseguir una comprensió més profunda dels conceptes i tècniques treballades, sinó que també és una manera d'exposar clarament les dificultats que planteja la incorporació de noves idees.

En un model de transmissió cultural com l'actual, com més va més compartimentat, són una oportunitat excel·lent per remarcar les connexions internes i externes, que necessàriament trontollen en assegurar la coherència de les idees preestablertes en l'alumnat. També serveix per introduir la idea subversiva que les matemàtiques són cultura: no són un producte complet i acabat, sinó que estan en constant evolució, i influïdes per la manera de pensar d'una gran comunitat, que a més canvia al llarg del temps.

Alguns alumnes se senten impotents i desanimats per no caure per si sols en idees o tècniques que potser han necessitat segles en ser acceptades o dominades, i és de gran ajuda en aquest cas canviar com a docents la idea de matemàtiques que transmetem, a vegades inconscientment: la gènesi de nous conceptes rarament ha estat la idea genial d'una persona aïllada; els resultats matemàtics ni es «descobreixen» ni són veritats eternes, sinó que es reinterpreten, es poleixen i s'amplien amb el temps.

L'activitat que es presenta a continuació s'ha dut a terme amb els alumnes de batxillerat de l'escola Galí Bellesguard (Barcelona), tant de 1r com de 2n. Inicialment estava previst fer-la tant amb els alumnes del batxillerat en la modalitat científica com en els del social, però per falta de temps i altres

motius que es desenvoluparan més endavant es va haver d'optar per fer-la només amb els del científic. Aquest conjunt d'alumnes és en principi receptiu a aquest tipus d'activitats, ja que a l'escola s'hi duen a terme des de fa anys les propostes del «Matemàtic del Mes», on una vegada al mes dediquem l'inici de la classe a parlar d'un(a) matemàtic(a) i del seu àmbit d'estudi, o també la «Línia del Temps» al Laboratori de Matemàtiques, on representem visualment l'any en què se situen documents històrics rellevants i els matemàtics de què anem parlant a l'aula (vegeu la fig. 1).



FIGURA 1: Surocs amb les propostes de la Línia del Temps i el Matemàtic del Mes.

FONT: Fotografies de l'exposició. Elaboració pròpia.

L'objectiu de l'activitat és resoldre un problema geomètric molt concret: «com dibuixar un segment de longitud donada sobre un cercle, de manera que estigui alineat amb un punt donat?» Es tracta d'un problema d'Apol·loni,¹ «rescatat» als inicis de l'edat moderna, que desenvolupa Marino Ghetaldi (1566-1626) a principis del segle XVII, quan conjuntament amb François Viète (1540-1603) exploren les possibilitats de l'àlgebra especiosa per resoldre els problemes geomètrics de l'antiguitat. Resulta un problema especialment interessant des del punt de vista històric, perquè disposem d'una altra resolució diferent, però de finals de segle, d'Antonio Hugo de Omerique (1634-1705), un matemàtic gadità. Omerique afegeix a la resolució geomètrica una interpretació algebraica, fet que pot ajudar l'alumnat a establir connexions internes entre àlgebra i geometria en la resolució de sistemes d'equacions.

Per tal de poder comprendre bé el problema, però alhora mirant de minimitzar al màxim les hores emprades, s'opta per dedicar-hi dues sessions: una primera, de caire més pràctic, on es replica amb Geogebra la construcció geomètrica proposada per Ghetaldi, i una segona, de caire més reflexiu, on s'analitza un fragment original d'Omerique i es reflexiona sobre la relació entre les dues propostes de solucions.

1. Apol·loni de Perge (c. 262 aC – c. 190 aC) fou un geòmetra i astrònom grec extremadament influent en la història de les matemàtiques, en especial pels vuit llibres de les seves Còniques. Les seves definicions, propietats i aplicacions de les corbes obtingudes per la intersecció d'un pla i un con s'empren encara avui en dia, i s'usarien també per modelitzar el moviment dels planetes durant l'edat mitjana. Vegeu MacTutor - Apollonius of Perga (<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Apollonius/>)

Primera sessió: «Geogebritzem un problema històric»

Realitzem la sessió en una aula amb ordinadors, i cada alumne rep un petit dossier amb una breu introducció i la còpia del problema que pretenem resoldre. De manera volgudament esquemàtica, expliquem que la resolució que veurem pertany al període d'algebrització de les matemàtiques, un procés que va tenir lloc al llarg dels segles XVI i XVII, on gradualment les interpretacions i resolucions geomètriques i algebraïques van començar a interrelacionar-se, i que desembocaria en el camp que posteriorment anomenaríem *geometria analítica*.

El protagonista de la sessió és Ghetaldi, un matemàtic croat nascut a Dubrovnik que va iniciar un llarg viatge per Europa que li permetria estudiar, entre d'altres, amb Cristopher Clavius (1538-1612) a Roma, o amb Viète a París, amb qui treballaria conjuntament i establiria després una forta amistat.²

El problema proposat és el que inicia *Apollonius redivivus* ('Apol·loni reviscut'), publicat a Venècia el 1607 per Ghetaldi. L'alumnat ja sap que al Renaixement va sorgir un gran interès pel món antic, i que es van recuperar textos clàssics que es creien perduts, traduint-los directament del llatí o grec. Això va ser cabdal, també per a les matemàtiques, ja que, en tenir els enunciats i solucions dels problemes geomètrics grecs de feia més d'un mil·lenni, però no el mètode de resolució, estudiosos d'arreu d'Europa com Ghetaldi o Viète progressivament mirarien de resoldre'ls amb la nova i potent eina matemàtica de què començaven a disposar: l'àlgebra simbòlica.

Demanam als alumnes entrar a <https://books.google.es/books?id=DK5AAAAcAAJ>, que és la font original de Ghetaldi digitalitzada, i buscar el primer problema del llibre. Els crea una certa sorpresa que puguin accedir tan fàcilment a un llibre tan antic!

Problema I (Ghetaldi, 1607: 2): *In dato circulo aptare rectam lineam magnitudine datam, que ad datum punctum pertingat*. [En un cercle donat, col·locar un segment recte de longitud donada, que passi per un punt determinat].

El problema té, de forma natural, dos casos diferents: quan el punt és exterior al cercle, i quan hi és interior. Se'ls demana llegir i entendre la resolució del problema de Ghetaldi i fer la construcció amb Geogebra com a mínim del primer cas, seguint el seu procediment. Ràpidament apareixen les queixes perquè veuen que el text és en llatí, però en el dossier que se'ls ha proporcionat hi tenen una traducció aproximada al català, que respecta els mateixos diagrames originals de l'autor.

2. Ghetaldi arriba a París el febrer de 1600, on coneix a Viète en persona i inicien la seva col·laboració. Viète deixaria editar a Ghetaldi el seu *De numerosa potestatum ad exegesim resolutione*, publicat a París, que acaba amb una carta de Ghetaldi al matemàtic belga Michel Coignet on diu que el tractat d'àlgebra nova de Viète «li ha obert una llum». Per la seva banda, Viète i Ghetaldi emprendrien conjuntament la tasca de restaurar l'obra d'Apol·loni interpretant-la amb les noves eines analítiques: Viète publica el 1600 *Apollonius Gallus*, Ghetaldi publica el 1607 a Venècia l'*Apollonius redivivus* (que tindria una segona part el 1613) i el *Supplementum Apolloni Galli*.

Primer cas (traducció pròpia):

Ens són donats el cercle DHE, el centre del qual és B, un punt A que és exterior al cercle, i una magnitud lineal Z, que no sigui major al diàmetre del cercle. Cal situar en el cercle DHE el segment rectilini de longitud Z, de manera que estigui alineat amb el punt A.

Si el diàmetre del cercle DHE fos igual a Z, caldria unir A amb el centre, i dibuixar el segment que es proposa. Si Z és menor que el diàmetre, dibuixem la tangent al cercle en el punt E que passi per A, i connectem amb un segment BE, de manera que BE i EA estan en angle recte: aleshores sobre EB hi representem EF, que és igual a la meitat de Z, i connectem A i F. Amb centre F, descrivim el cercle CEG, que és secant amb AF en els punts C i G: per tant aquest cercle és tangent a la recta AE, donat que l'angle AEF és recte.

Prenent A com a centre, amb longitud AC, descrivim un cercle secant al cercle DHE, i anomenem H el punt on són secants. A continuació tracem la recta AH, que serà secant al cercle en D.

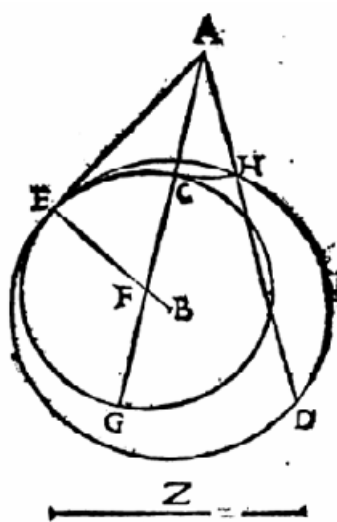


FIGURA 2: Diagrama original de Ghetaldi, amb la construcció del primer cas.

FONT: Ghetaldi, 1607: 2.

Ghetaldi demostra a continuació que el problema ja està resolt, ja que el segment HD ha de tenir longitud Z, per construcció. Els demanem que ho comprovin amb l'eina de mesura de segments dels Geogebra, i que després ho demostrin per ells mateixos. Els alumnes han de veure (vegeu la fig. 2) que $HD = CG$ per translació, i que $CG = 2 FE = Z$ per construcció.

És clar que la base del procediment de Ghetaldi és la construcció amb regle i compàs, i si disposéssim de més temps hauria estat interessant replicar-la també amb aquestes eines. No obstant això, i tot i que estiguem fent la resolució geomètrica d'un problema del segle XVII amb eines tecnològiques actuals, considero que el problema no queda desvirtuat del seu context. Gràcies al Geogebra podem centrar-nos en aquest cas en comprendre l'algorisme i entendre les relacions geomètriques entre els elements de la construcció (vegeu la fig. 3). La capacitat addicional d'afegir dinamisme a la construcció, movent la posició del punt inicial i comprovant que la solució segueix sent vàlida perquè és general, és clar que no era possible sobre el paper fa tres segles, però dona oportunitats diferents als alumnes actuals per sorprendre's i pensar què fa que això sigui possible. Per últim, l'ús d'eines addicionals com la mesura de segments no substitueix, sinó que complementa el necessari

procés de deducció que han de dur a terme per entendre com funciona la resolució geomètrica.

Podem trobar un exemple d'ambdós casos en les següents construccions de Geogebra:

1r cas: <https://www.geogebra.org/classic/mqrgcsvg>

2n cas: <https://www.geogebra.org/classic/q4vyxjtv>

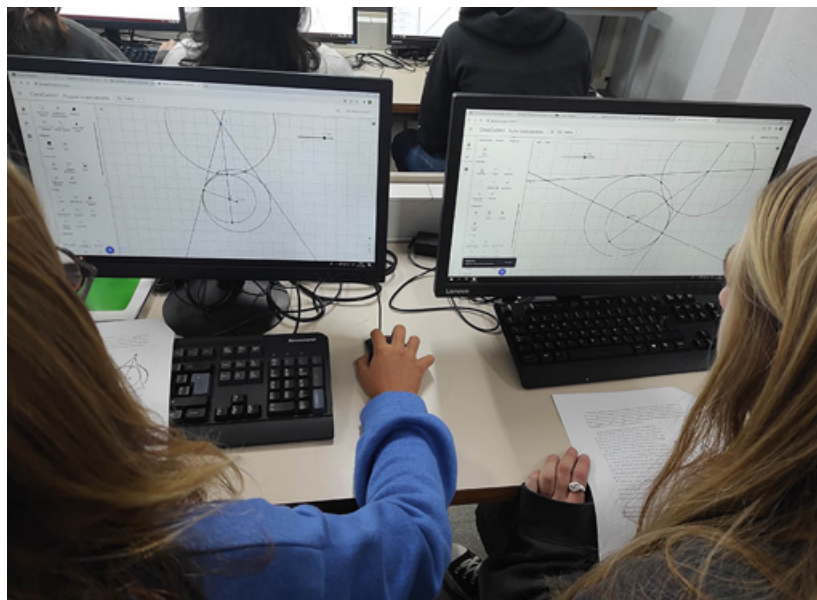


FIGURA 3: Construccions amb Geogebra de dues alumnes de batxillerat, seguint les indicacions de Ghetaldi.

FONT: Fotografia pròpia.

Segona sessió: «Connectem àlgebra i geometria»

Comencem recordant a la seva aula habitual l'enunciat del problema resolt el dia anterior. Aquest problema va circular per Europa, i matemàtics com Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667), jesuïta flamenc, van refinar i simplificar-ne la demostració. A finals del segle XVII, Omerique va analitzar el mateix problema a la seva *Analysis Geometrica* (1698), on afirmava que aquella resolució geomètrica té una interpretació numèrica: «trobar nombres recíprocs [inversament proporcionals] amb suma o diferència donada». L'objectiu d'avui és entendre aquesta interpretació numèrica d'Omerique del problema de Ghetaldi.

Repartim de nou un petit dossier on puguin escriure i seguir l'esquema de la sessió (vegeu la fig. 4). Per començar, demanem en primer lloc resoldre analíticament el sistema (I):

$$\begin{cases} x \cdot y = 18 \cdot 50 \\ x - y = 25 \end{cases}$$

Per substitució, observen que resoldre el sistema porta a resoldre l'equació de segon grau: $x \cdot (x - 25) = 900$, que té com a única solució positiva $(x,y)=(45,20)$.

Entrem a la font original d'Omerique: <https://books.google.es/books?id=9L8pg1eWvf0C>, i projectem la resolució analítica del final de la *propositio XXXVII* (Omerique, 1698: 206), per tal que comparin com ho han resolt ells i com ho fa aquest autor (vegeu la fig. 4).

I això, per què passa? No és gens evident, d'entrada, la relació entre el problema geomètric i la resolució del sistema d'equacions. Ens cal recórrer a una proposició que apareix als *Elements* d'Euclides:

Proposició 3.36 (Euclides): *Prenem un punt exterior d'un cercle i tirem dos segments [radials] cap al cercle, [l'un] que el talla i [l'altre] tangent. Resulta que el rectangle de costats el segment sencer i la part del segment que queda fora del cercle, entre el punt i la part cònca de la circumferència, equival al quadrat de costat el [segment] tangent.*³

En aquesta proposició s'estableix que el que actualment denominem *potència d'un punt* respecte d'una circumferència és constant. Això implica que, en la fig. 5, $AH \cdot AD = EA \cdot EA$, ja que EA és tangent a la circumferència de centre B.

Aquesta propietat fonamental és la que va utilitzar també Descartes a *La Géométrie* (1637) per resoldre geomètricament l'equació de segon grau $x^2 = ax + b^2$. Tan sols ens cal construir un triangle rectangle de catets $NL = a/2$ i $LM = b$, i prolongar-ne la hipotenusa fins a intersecar amb la circumferència de centre N i radi NL : el segment OM serà la solució de l'equació (vegeu la fig. 6). La demostració és conseqüència de la proposició anterior: com $NL = a/2$, $OP = a$, i per tant $x = OM$, ja que $OM \cdot PM = LM \cdot LM$, és a dir, $x \cdot (x - a) = b \cdot b$, que és l'equació que volíem resoldre.

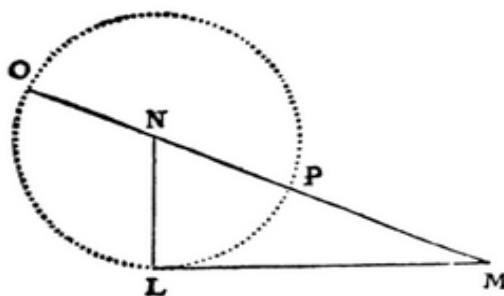


FIGURA 6. Diagrama original de Descartes que acompanya l'explicació de la resolució de l'equació anterior.

FONT: Descartes, 1954 [1637]: 302.

En el problema resolt per Omerique, ens trobem exactament amb el mateix cas que el tractat per Descartes. El triangle rectangle AEF (vegeu la fig. 5) té catets $EA = 30$ i $EF = 25/2$, i per tant la prolongació de la seva hipotenusa fins a intersecar amb el cercle, AG, és la solució de l'equació $x^2 = 25x + 30^2$, que és justament la que havíem obtingut en mirar de resoldre per substitució el sistema (I). Amb el compàs simplement aconseguim traslladar sobre la recta alineada amb el punt les magnituds $AG = AD = 45$ i $CG = HD = 25$, tal com volíem comprovar.

3. Vegeu Pla, 2018: 233.

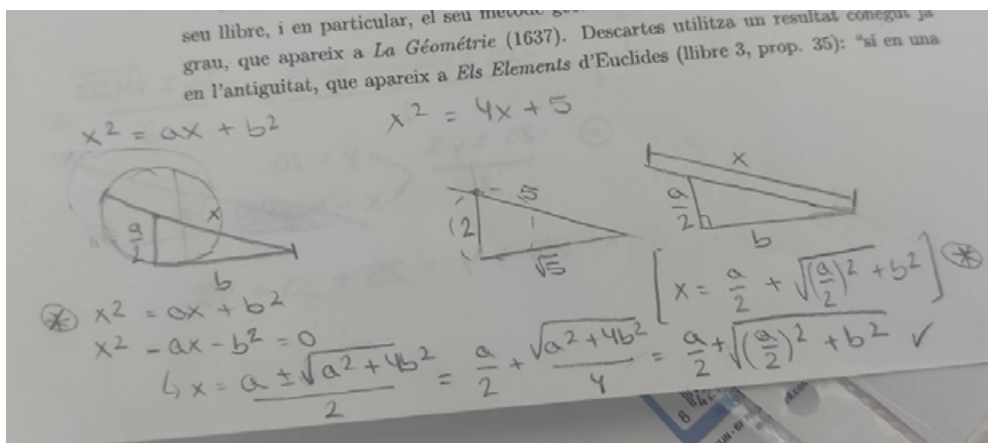


FIGURA 7: Verificació al marge del dossier d'un alumne del mètode geomètric de resolució d'una equació de segon grau de Descartes.

FONT: Fotografia pròpia.

Acabem la sessió amb preguntes orientades a fer entendre que el resultat és generalitzable a resoldre qualsevol sistema compatible de producte i diferència determinades (vegeu la fig. 7).

Breument, fem notar al final de la segona sessió que en aquesta breu excursió històrica estudiant un únic problema han aparegut en un moment diversos matemàtics: Ghetaldi, Viète, Descartes, Grégoire de Saint-Vincent, Omerique. Remarquem que aquesta és la manera de construir i treballar habitualment en matemàtiques, a partir de múltiples aportacions col·lectives, i no pas, com habitualment pensen, per l'obra de genis aïllats.⁴

Valoració de l'activitat

Els alumnes van valorar l'activitat de manera positiva, tant a primer com a segon de batxillerat, i en van destacar especialment que els havia agradat treballar de manera diferent a les dues sessions, però que tot i així estiguessin directament connectades. També els va agradar treballar amb fragments de fonts originals i poder accedir directament als llibres, que no sabien que tenien al seu abast. En general, no la van considerar una activitat fàcil, i un parell d'alumnes consideraven que haurien necessitat més formació en dibuix tècnic i Geogebra en cursos anteriors per poder fer la construcció amb més agilitat i de manera autònoma. La majoria coincidien que, amb només dues sessions, el ritme de treball havia estat molt ràpid i que haguessin preferit espaiar-ho en tres sessions i poder completar i analitzar els dos casos del problema.

Ja era conscient d'aquest problema del temps en dissenyar l'activitat, però tenia clar que no podia dedicar-hi més de dues sessions, de manera que les biografies havien de quedar reduïdes a la mínima expressió i prioritzava incidir en les idees generals sobre la gènesi de les idees matemàtiques, i la manera de treballar. A batxillerat hi ha el problema enquistat des de fa anys d'haver d'anivellar els alumnes amb el que haurien de saber per la seva edat, després d'anys de fer-los treballar per sota de les seves possibilitats, i tots els qui hi ensenyem sabem que hem de córrer per poder explicar en només dos anys allò que en necessitaria ben bé tres.

4. De manera significativa, cap d'aquests personatges esmentats és una dona, i això no és casual, ni fruit d'una estratègia d'invisibilització. Fem notar que la majoria d'ells tenien relació amb l'Església, i més concretament amb els jesuïtes, que constituïen la via de comunicació científica a nivell europeu en aquell moment: les vies de transmissió del coneixement matemàtic quedaven estroncades per a elles, doncs.

Un dels problemes específics en aquesta activitat, però, va ser que tot i la completa disposició dels meus companys professors perquè fes les sessions amb els seus alumnes —que agraeixo de tot cor— no van gosar fer-les ells mateixos encara que els donés el dossier i tot el material que havia preparat. Això va obligar a encaixar el meu horari amb el d'altres grups, de manera que vaig poder fer-la només amb els dos grups del científic. En parlar-ne amb posterioritat amb ells, em va quedar clar que no era per manca de voluntat, ja que havien llegit l'activitat i la valoraven molt positivament, sinó per recança a treballar amb fonts històriques sense estar-hi avesats, per por a dir alguna barrabassada. Això potser és indicador de la necessitat d'incidir en la formació en història de les matemàtiques per als futurs professors, tant als graus respectius com a les formacions contínues, per així aconseguir fer perdre aquesta por al professorat.

Amb aquesta activitat hem aconseguit connectar la resolució algebraica d'un sistema d'equacions no lineal amb la seva resolució geomètrica, que era l'objectiu principal. Aquesta connexió entre àlgebra i geometria, pròpia del període d'algebrització, suposa una transformació conceptual i profunda en els mètodes i objectius de les matemàtiques (Massa-Esteve, 2020). Per exemple, ens serveix per posar en qüestió el concepte de prova matemàtica: la resolució del problema és correcta perquè ha estat construïda geomètricament, o bé és correcta perquè la modelització algebraica i posterior resolució funciona? És justament al llarg d'aquest segle que la font de certesa es trasllada gradualment d'un camp a l'altre, de la geometria a l'àlgebra (Bos, 2001).

A nivell d'aula, l'activitat ha assolit també molts altres objectius, com per exemple: despertar l'interès per la geometria plana, treballar directament amb fragments seleccionats de fonts primàries, mostrar la matemàtica com un camp viu i en constant transformació. També ens ha permès reflexionar sobre com la recerca en matemàtiques està connectada amb la cultura i s'esdevé habitualment de forma col·lectiva, a partir d'uns interessos o motivacions compartides.

Referències bibliogràfiques

- BONET, Guillem i MATAS, Roser (2017). «La calculadora d'Ahmés – Reflexió i raonament entorn del propi sistema de numeració i del significat de les seves operacions a través de la investigació, com a base de l'aprenentatge matemàtic». *Nou Biaix*, 41, p. 22-34.
- Bos, Henk (2001). *Redefining Geometrical Exactness. Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction*. Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences. New York: Springer-Verlag.
- DESCARTES, René (1954 [1637]). *The geometry of Rene Descartes*. Traducció i edició de David Eugene Smith i Marcia L. Latham. Nova York: Dover. [Edició original de Descartes: *La géométrie*, 1637].
- GHETALDI, Marino (1607). *Apollonius redivivus. Seu, restituta apollonii pergae. Inclinationum Geometria*. Venècia: Apud Bernardum Iuntam.
- MASSA-ESTEVE, Maria Rosa (2003). «Aportacions de la història de la matemàtica a l'ensenyament de la matemàtica». *Biaix*, 21, p. 4-9.
- MASSA-ESTEVE, Maria Rosa (2005). «L'ensenyament de la trigonometria – Aristarc de Samos (310-230 aC)». A: GRAPÍ, Pere & MASSA-ESTEVE, Maria Rosa (Eds.), *Actes de la I Jornada sobre Història de la Ciència i l'Ensenyament*, Barcelona: Institut d'Estudis Catalans, p. 95-101.
- MASSA-ESTEVE, Maria Rosa (2020). «The Algebraization of Mathematics: Using Original Sources for Learning Mathematics». *Teaching Innovations*, XXXIII, p. 21-35.
- OMERIQUE, Antonio Hugo (1698). *Analysis geometrica sive Nova, et vera methodas resolvendi tam problema- ta geometrica quam arithmeticas quaestiones*. Cadis: Typis Christophori de Requena.
- PLA, Josep (2018). *Història de la matemàtica: Grècia IIa (els Elements d'Euclides: llibres I, II, III, IV, V i VI)*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans.
- ROMERO, Fàtima [et al.] (2021). «Textos històrics per a l'aprenentatge de les matemàtiques: el cas dels nombres negatius». A: FERRAGUD, Carmel; MASSA-ESTEVE, Maria Rosa (ed.), *Actes de la XVII Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament*, Barcelona: Institut d'Estudis Catalans, p. 17-28.
- VIRGILI, David (2023). «Antonio Hugo de Omerique, geometra modern d'arrels clàssiques». *SCM/Notícies*, 52, p. 98-105.

IDEAS HISTÓRICAS Y DIDÁCTICAS SOBRE LA CUADRATURA ARITMÉTICA DE JACQUES OZANAM (1640-1718)

**PEDRO J. HERRERO PIÑEYRO;¹ ANTONIO LINERO BAS;²
ANTONIO MELLADO ROMERO³**

¹ IES BENIAJÁN, BENIAJÁN (MURCIA)

² DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DE MURCIA

³ IES LICENCIADO CASCALES (MURCIA)

Resumen: La obra matemática de Jacques Ozanam (1640-1718) se desarrolló en una época de transformación de las matemáticas, motivada, entre otras, por la aplicación del análisis algebraico como método de resolución de problemas geométricos y aritméticos. En este proceso, llamado de algebrización de las matemáticas, fueron claves los trabajos de François Viète (1540-1603) y René Descartes (1596-1650), cuya influencia es notoria en la obra de Ozanam. Este fue un autor prolífico: publicó numerosos tratados sobre matemáticas puras y mixtas; escribió un curso matemático; hizo aportaciones al Journal des Sçavants... Su obra matemática se caracteriza por un lenguaje matemático avanzado, que relacionó geometría y álgebra, trasladando, por ejemplo, problemas puramente geométricos a relaciones algebraicas, que más tarde interpretaría como expresiones de ciertos lugares geométricos en el plano. En este trabajo, utilizaremos fuentes primarias de Ozanam para ilustrar el beneficio y la utilidad que puede tener el uso de la historia de las matemáticas en el aula. Consideramos la fórmula aritmética del área de un círculo de diámetro 1, a saber, $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$

Palabras clave: Historia y enseñanza de las matemáticas, actividades para el aula, siglo XVIII, algebrización, cuadratura aritmética, J. Ozanam, G. W. Leibniz.

Idees històriques i didàctiques sobre la quadratura de Jacques Ozanam (1640-1718)

Resum: L'obra matemàtica de Jacques Ozanam (1640-1718) es va desenvolupar en un període de transformació de les matemàtiques, motivada, entre altres, per l'aplicació de l'anàlisi algebraica com a mètode de resolució de problemes geomètrics i aritmètics. En aquest procés anomenat d'algebrització de les matemàtiques, varen ser claus els treballs de François Viète (1540-1603) i René Descartes (1596-1650), que varen influir notòriament en l'obra d'Ozanam. Aquest va ser un autor prolífic: va publicar nombrosos tractats sobre matemàtiques pures i mixtes; va escriure un

curs matemàtic; va fer aportacions al Journal de Scavants... La seva obra matemàtica es caracteritza per un llenguatge matemàtic avançat, que va relacionar geometria i àlgebra, traslladant, per exemple, problemes purament geomètrics a relacions algebraïques, que més tard interpretaria com a expressions de certs llocs geomètrics en el pla. En aquest treball, emprarem fonts primàries d'Ozanam per il·lustrar el benefici i la utilitat que pot tenir l'ús de la història de la matemàtica en l'aula. Considerem la fórmula aritmètica de l'àrea d'un cercle de diàmetre 1, és a dir $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots$

Paraules clau: Història i ensenyament de les matemàtiques, activitats per a l'aula, segle XVIII, algebrització, quadratura aritmètica, J. Ozanam, G.W. Leibniz.

Historical and didactic ideas about the arithmetic squaring by Jacques Ozanam (1640-1718)

Summary: The mathematical work of Jacques Ozanam (1640-1718) took place at a time of transformation of mathematics, motivated, among other things, by the application of algebraic analysis as a method of solving geometrical and arithmetical problems. The work of François Viète (1540-1603) and René Descartes (1596-1650), whose influence on Ozanam's work is notorious, were key to this process, known as the algebrization of mathematics. Ozanam was a prolific author: he published numerous treatises on pure and mixed mathematics; he wrote a mathematical course; he contributed to the Journal des Sçavants... His mathematical work is characterised by an advanced mathematical language, which related geometry and algebra, translating, for example, purely geometric problems into algebraic relations, which he would later interpret as expressions of certain geometric places in the plane. In this paper, we will use Ozanam's primary sources to illustrate the benefit and usefulness of using the history of mathematics in the classroom. We consider the arithmetical formula for the area of a circle with a diameter of 1, namely, $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots$

Keywords: History and teaching of mathematics, room activities, 17th century, algebrization, arithmetic quadrature, J. Ozanam, G.W. Leibniz.

Introducción

Cuando empezamos un curso, indistintamente de su etapa educativa, es primordial captar el interés del alumnado. Las matemáticas se presentan a menudo como un producto pulido, tan bien definido que podría parecer que siempre han sido y serán como se exponen hoy en día. Esta impresión impide que el estudiante perciba que el constructo teórico que hoy se le brinda ha sido consecuencia del trabajo conjunto y la evolución de las ideas en sucesivas épocas de la historia. En parte con el objetivo de cuestionar esa idea preconcebida, creemos que la ayuda de la historia de las matemáticas en el aula puede resultar beneficiosa si se usa de modo apropiado. En las últimas décadas, se ha hecho un esfuerzo para que esta herramienta se pueda implementar en el aula,¹ incluso hay grupos de trabajo internacionales que cooperan en desarrollarla apropiadamente.²

Sobre los beneficios y contraindicaciones del recurso de la historia en el aula de matemáticas se ha debatido mucho.³ En cuanto a las dificultades de su uso, entre otras, se alega que, si forman parte del currículo, los temarios se ampliarían todavía más, por lo que aumentaría la carga de trabajo de los alumnos; no queda claro tampoco cómo se podría evaluar el aprendizaje conseguido en clase, ni

1. Como ejemplo de estos materiales, véase Massa-Esteve (2014), donde la autora se sirve de la obra *Nova Scientia* (1537), de Tartaglia (c. 1499-1557), para motivar el estudio de la trigonometría en clase.

2. Por ejemplo, las conferencias bianuales CERME, organizadas por *European Society for Research in Mathematics Education*, <http://erme.site>, potencian la historia y la pedagogía de las matemáticas.

3. Por su visión general, consúltase Clark *et al.* (2018).

si es pertinente su evaluación; además, no todo el profesorado está formado en estas cuestiones históricas, ni quizás tenga el suficiente interés en esa formación, lo que supondría un esfuerzo adicional por su parte. No obstante, parece que los beneficios están claros: además de presentar una materia viva, en progreso y conectada con la sociedad y los problemas reales, fruto del trabajo de muchas generaciones de matemáticos, procuran una formación humanista, ya en desuso, y conforman una visión holística de la materia; se pueden emplear como punto de enganche en clase, para potenciar la curiosidad y la admiración de los estudiantes, sobre todo si somos capaces de presentar fuentes primarias que permitan hacernos una idea de la evolución de las matemáticas; su conocimiento puede ayudar a superar obstáculos epistemológicos en etapas iniciales, como ocurre, por ejemplo, con los conceptos de función o de tangente a una curva; incluso, pueden ser fuente de inspiración para plantear nuevas cuestiones, hasta el nivel superior.

Los siglos XVI y XVII constituyen una época de la historia de las matemáticas muy útil para poner de manifiesto todos los efectos beneficiosos de los que hemos hablado anteriormente: en esos siglos, hay un gran interés por la recuperación de los textos clásicos (Euclides, Apolonio, Arquímedes, Diofanto...), lo que incentiva nuevos métodos analíticos de descubrimiento en matemáticas; se desarrolla el proceso de algebrización de las matemáticas, que origina la transición de pensar las matemáticas desde un punto de vista más geométrico, imperante hasta entonces, hacia uno más algebraico, en el que son decisivas las figuras de François Viète (1540-1603) y René Descartes (1596-1650); el uso del infinito no se evita y aparecen distintos algoritmos infinitos, sobre todo en el ámbito de las cuadraturas numéricas.

Al adentrarse en cualquiera de los problemas en el cálculo de esa época (obtener la tangente a una curva; calcular máximos y mínimos de una función; obtener longitudes de curvas, áreas acotadas por curvas...), obtendremos material valiosísimo que nos sirva de apoyo para atraer la atención de nuestros alumnos, para hacerles comprender el origen de las ideas y procedimientos algebraicos que actualmente usamos, y para intentar salvar las reticencias y los obstáculos de aprendizaje que puedan surgir al enfrentarse con estos temas.

En el presente trabajo, vamos a estudiar la cuadratura aritmética del círculo desarrollada por Jacques Ozanam (1640-1718) en su *Géométrie Pratique* (1684). Mostraremos los ingredientes que utilizó Ozanam para dar la prueba, que contiene, entre otros, progresiones, tanto aritméticas como geométricas, y series infinitas; de este estudio entresacaremos algunas actividades, pensadas para alumnos de educación secundaria o bachillerato e, incluso, para alumnos de un primer curso del grado en matemáticas o de un grado de ciencias.

Jacques Ozanam: vida y obra

La mayoría de los retazos biográficos nos ha llegado fundamentalmente a través del *Elogio de Fontenelle* (1657-1757) (Fontenelle, 1719). Otra fuente importante, también para su obra, es la referencia que hace Montucla (1725-1799) en su *Historia de las Matemáticas*, (Montucla, 1758). Sin duda por la cercanía del autor, descendiente directo de Jacques Ozanam, una obra que recoge abundante información sobre su vida es *Vie de Frédéric Ozanam: Professeur de littérature étrangère à la Sorbonne* (1879). En esta obra, dedicada a mayor gloria de Frédéric Ozanam (1813-1853),⁴ su hermano

4. Frédéric Ozanam fue profesor de Derecho en la Universidad de Lyon, y profesor de lenguas extranjeras en la Universidad de la Sorbonne. En 1833 fundó, junto a un grupo de laicos católicos, la Sociedad de San Vicente de Paúl. Fue beatificado por S. Juan

Charles-Alphonse nos relata acontecimientos notables de miembros destacados de la saga familiar de los Ozanam, empezando precisamente con la figura de Jacques Ozanam. Nació J. Ozanam en Saint-Olive, Ain, en 1640. Inició estudios eclesiásticos con los jesuitas, en donde conoció a Claude Dechaies (1621-1678) y a Jacques de Billy (1602-1679), pero a la muerte de su padre abandona esos estudios y se interesa por las matemáticas, a las que se dedicaría toda su vida, enseñándolas primero en Lyon, para más tarde continuar en París, donde llegó a ser miembro de la Real Academia de Ciencias de París en 1713. Murió en la capital francesa en 1718.

Según leemos en Gómez *et al.* (2021, 2023), la obra de Ozanam fue copiosa, con más de veinticinco tratados y cursos, reimpressiones, artículos en la revista *Journal de Savants*... Abarcó diferentes ámbitos como álgebra, geometría, matemáticas mixtas... incluso recreaciones matemáticas y físicas. Entre sus obras, paradójicamente, una de las que pudo haberle reportado más fama, por la pericia matemática que demuestra, es un manuscrito, una obra no publicada sobre la Aritmética de Diofanto (Ozanam, c. 1674).⁵ Su obra matemática fue conocida y reconocida en vida del propio Ozanam.⁶

Sobre las características de la obra de Ozanam, recomendamos la lectura de Gómez *et al.* (2021, 2023). Por resumirlas muy brevemente, su obra matemática se caracteriza por un lenguaje matemático avanzado, que relaciona geometría y álgebra, trasladando, por ejemplo, problemas puramente geométricos a relaciones algebraicas, que más tarde interpreta como expresiones de ciertos lugares geométricos en el plano. Con su método matemático, fue capaz de obtener nuevos resultados, como ocurre con las numerosas adiciones que presentó en su manuscrito sobre la *Aritmética* de Diofanto (Gómez *et al.*, 2021).

La cuadratura aritmética del círculo por Jacques Ozanam

Como hemos comentado, la obra de Ozanam era conocida, y elogiada, por Leibniz. En uno de sus numerosos encuentros en la capital parisina, Leibniz lo introduce en la cuadratura aritmética del círculo de diámetro 1, a saber, $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$. Con esas indicaciones de Leibniz, Ozanam fue capaz de encontrar una demostración propia para tal cuadratura, que presentó en su *Géométrie Pratique* de 1684 (Ozanam, 1684).

Indiquemos que en este tratado aparece por primera vez en imprenta, en 1684, la demostración de la cuadratura aritmética del círculo de diámetro 1, conocida actualmente como cuadratura aritmética de Leibniz.

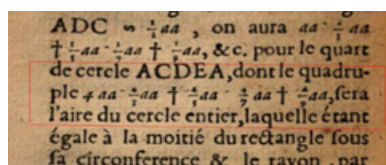


FIGURA 1. Fórmula de cuadratura aritmética del círculo de radio a .

FUENTE: Ozanam, 1684: 198. El subrayado es nuestro.

Pablo II en agosto de 1997.

5. Para más información sobre el manuscrito, véase (Gómez *et al.*, 2021).

6. Por ejemplo, el propio Leibniz (1646-1716) alabó el tratado sobre nuevos elementos de Álgebra de Ozanam publicado en 1702 (Leibniz, 1703).

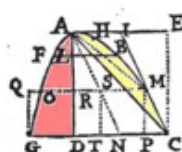
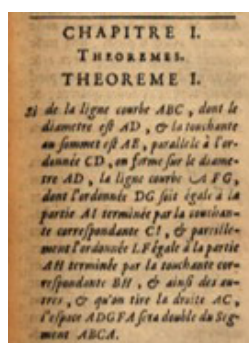
La autoría se asigna, con razón, a Leibniz, quien, en su estancia en París, redacta en 1676 el manuscrito *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis*, en donde demostró la fórmula, que no llegaría a publicarse hasta tres siglos más tarde, en 1993 (Leibniz, 1993). Esto hizo que entre Leibniz y Ozanam surgiera una disputa epistolar por la autoría de la demostración:⁷ efectivamente, Ozanam reconoció que Leibniz le abrió el camino para conseguir la prueba, pero viendo que no lograba conseguir que Leibniz le diera la demostración, con las indicaciones iniciales fue capaz de hilvanar su propia prueba.

Cuadratura aritmética del círculo por Ozanam. Teoremas previos

La cuadratura aritmética aparece en el Teorema VII,⁸ dentro del capítulo dedicado a la planimetría, en la *Géométrie Pratique*, p. 192-200. En dicho teorema, Ozanam encuentra la cuadratura aritmética para el área del círculo de diámetro $2a$, es decir, para πa^2 , cuya aplicación se usará para dar las aproximaciones mencionadas en el enunciado. Para llegar al resultado, Ozanam prepara el camino con seis teoremas previos que pasamos a describir brevemente. El primer teorema establece un resultado general para cuadrar una línea curva, igualándola al doble del área de un cierto segmento:

Teorema I. Si a partir de la línea curva ABC (cuyo diámetro es AD y la tangente en el punto máximo es AE, paralela a la ordenada CD), se forma sobre el diámetro AD la línea curva AFG, de modo que: su ordenada DG sea igual a la parte AI terminada [interceptada] por la tangente correspondiente CI [junto con la recta AE], y similarmente la ordenada LF [sea] igual a la parte AH terminada por la tangente correspondiente BH, y así con las otras, y si se traza la recta AC, [entonces] el espacio ADGFA [color salmón, ver Figura 2] será el doble que el segmento ABCA [color amarillo].

En la prueba de este resultado se usa geometría elemental sobre paralelogramos, basada en el Libro I de los Elementos de Euclides. Según Ozanam, «este teorema es de gran utilidad, como veréis a continuación; todavía no nos hemos enterado de que nadie lo haya demostrado de forma tan general como nosotros».⁹



(Los sombreados de colores son nuestros)

FIGURA 2. Enunciado del Teorema I.

FUENTE: Ozanam, 1684: 173.

7. La correspondencia epistolar aparece recogida en Foucher de Careil (1854). Para más detalles, véase también Gómez *et al* (2023).

8. THEOREME VII. *Le diametre d'un cercle est à sa circonference, environ comme 7 à 22, ou comme 100 à 314.* (Ozanam, 1684 : 192).

9. «Ce Theoreme est de grand usage, comme vous verrez dans la suite; & je n'ay pas encore appris que personne l'ait démontré si generalement que nous» (Ozanam, 1684 : 175-176).

El segundo teorema establece que la razón entre el área de una parábola y la de un paralelogramo de la misma base y altura es de $2/3$ (véase la fig. 3). Su prueba es consecuencia del Teorema I y del conocimiento de las propiedades de las cónicas.¹⁰

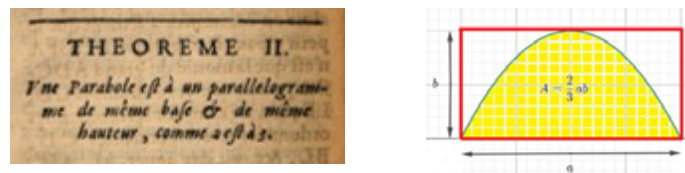


FIGURA 3. Enunciado del Teorema II e interpretación geométrica.

FUENTE: Ozanam, 1684: 176 (izquierda); elaboración propia (derecha).

El Teorema III establece cómo sumar series infinitas, empezando desde 0, con una cierta propiedad («en progresión aritmética continua»), y establece que la suma es igual a la mitad de la más grande multiplicada por el número que expresa la multitud de todas estas cantidades.¹¹

Veamos brevemente la idea desarrollada por Ozanam: toma la suma de esas cantidades como el área de un triángulo, en cuyo vértice sitúa a 0 (la primera cantidad) y en cuya base coloca a la más grande, AC; la altura del triángulo se divide en una infinidad de partes iguales en las que se colocan, paralelamente a la base, el resto de las cantidades. Ozanam justifica su desarrollo a través de semejanzas de triángulos y del uso de la Proposición 41 del Libro I de los Elementos de Euclides sobre medidas de triángulos.

Como continuación, en el Teorema IV se nos va a proponer ahora cómo obtener la suma de infinitos cuadrados cuyos lados están en progresión aritmética, y se establece que es igual a un tercio del cuadrado más grande multiplicado por el número que expresa la multitud de esos cuadrados.¹²

Ozanam aporta dos demostraciones de esta propiedad: una, de corte parecido a la prueba del Teorema III, pero ahora basándose en el conocimiento del volumen de una pirámide de base cuadrada, en la que se divide su altura en una infinidad de partes iguales, teniendo la base el cuadrado más grande (véase la fig. 4); otra nueva prueba, razonando sobre una parábola plana ABC en la que se cuadra su área mediante líneas paralelas al eje AD de la parábola.

En nuestro lenguaje actual, lo que vemos es que Ozanam ha justificado la cuadratura

$$\int_0^{\alpha} bx^n dx = \frac{b\alpha^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1} \cdot b\alpha^n \cdot \alpha$$

de manera geométrica, multiplicando $\frac{1}{n+1}$ por la potencia más grande, $b \cdot \alpha^n$, y por el número de términos que contiene la suma, en este caso, α .

10. Esta cuadratura de la parábola ya era conocida por Arquímedes, véase Heath (1897).

11. « THEOREME III. La somme des quantitez infinies en continuelle proportion arithmetique en commençant depuis 0, est égale à la moitié de la plus grande multipliée par le nombre qui exprime la multitude de toutes ces quantitez » (Ozanam, 1684: 181). El propio Ozanam afirma que, obviamente, este teorema se cumple también en el caso finito, pero ahora, en lugar de tomar la cantidad más grande, se debe tomar la suma de la más grande con la más pequeña.

12. « THEOREME IV. La somme des quarez infinies des quantitez en continuelle proportion arithmetique, en commençant depuis 0, est égal au tiers du plus grand quarré multiplié par le nombre qui exprime la multitude de ces quarez » (Ozanam, 1684: 183).

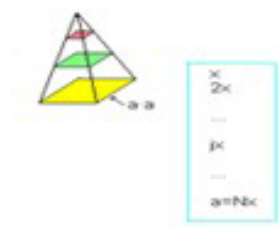


FIGURA 4. Cómo Ozanam entiende la suma de los cuadrados de números en progresión aritmética en el Teorema IV.

FUENTE: Elaboración propia.

A continuación, Ozanam nos presenta en el Teorema V la conocida expresión para el área de un polígono regular a través de los triángulos que lo componen: [El área de] Un polígono regular es la mitad del [área] del rectángulo bajo su circunferencia y la perpendicular, que va del centro a la mitad de uno de sus lados.¹³ La prueba es puramente geométrica y se apoya en la Proposición 41 de los *Elementos* de Euclides.

Para terminar con los preparativos de la cuadratura aritmética del círculo, el sexto teorema establece el área de la circunferencia en términos del área de un determinado triángulo:

Teorema VI. [El área de] Un círculo es la mitad de un rectángulo bajo [formado por] la circunferencia y su radio.¹⁴

La cuadratura aritmética del círculo por Ozanam: Teorema VII

Dentro de la prueba del Teorema VII, Ozanam describe y demuestra la cuadratura aritmética para el área del círculo de diámetro 2α , es decir, para $\pi\alpha^2$. Procede como sigue.

Construcción de la cuadratriz geométrica

Según Ozanam, desde el centro C del semicírculo ADB (ver Figura 5), se traza sobre el diámetro AB la perpendicular indefinida CD y desde el extremo B de ese mismo diámetro se traza una recta cualquiera BE, que corta

- a la perpendicular CD —prolongada cuando sea necesario— en F, y
- a la circunferencia del semicírculo en E;

se traza entonces por E una paralela indeterminada EG paralela a la línea CD; la recta EG terminará en un punto G de modo que IG sea igual a la parte correspondiente CF [es decir, si I es el punto del diámetro AB en el que la recta EG corta a dicho diámetro, se encuentra un punto G en la recta EG tal que $IG=CF$].

Como la recta BE se puede trazar de forma arbitraria, para tantos puntos E diferentes como se quiera elegir se podrán encontrar tantos puntos G diferentes asociados a ellos. Estos puntos G se unirán a través de una línea (*ligne courbe*) que pasará por el punto A, que en el dibujo viene dada por la curva AGO; esta línea curva tiene un punto de inflexión frente al centro de AC y una asíntota BH,

13. THEOREME V. Un polygone regulier est la moitié du rectangle sous sa circonference & la perpendiculaire, qui tombe du centre sur le milieu de l'un des côtes (Ozanam, 1684: 189).

14. THEOREME VI. Un cercle est la moitié d'un rectangle sous sa circonference & son rayon (Ozanam, 1684: 191).

que es perpendicular al diámetro AB.

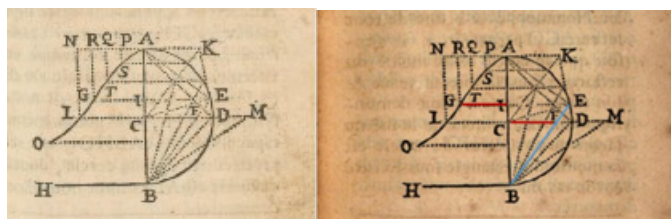


FIGURA 5. Dibujo para ilustrar la construcción de la curva generatriz en el Teorema VII; a la derecha, los trazos en color se han añadido al dibujo original.

FUENTE: Ozanam, 1684: 193 (izquierda); elaboración propia (derecha).

Esta curva AGO se llama *cuadratriz geométrica*, porque, según Ozanam, contribuye enteramente a la cuadratura del círculo: con el diámetro AB y la asíntota BH, la curva contiene un espacio indefinido ABHO. Ozanam prueba, basándose en el Teorema I previo, que el área del espacio indefinido ABHO es el doble del semicírculo ADCB, es decir, el espacio indefinido ABHO es justamente el área del círculo de diámetro 2α .

Generación de la fórmula de cuadratura aritmética

Ya probado que el área del círculo de diámetro 2α coincide con el área de la figura ABHO, el autor pasa a ver cuánto vale cada una de las porciones de ese espacio ilimitado. Empieza analizando el área de la zona ACLGA, delimitada por los segmentos AC, CL, que son iguales, y por la curva AGL. Para encontrar dicha área, completa el cuadrado ACLN y, previamente, busca el área del complemento AGLN.

Llama $x = GI = CF$, e $y = AI$, siendo a el radio AC; en ese caso, el segmento BI valdrá $2\alpha - y$, y el cuadrado del segmento IE valdrá $2\alpha y - y^2$.¹⁵

A continuación, mediante geometría elemental, aprovechando que los triángulos BIE y BCF son semejantes, Ozanam obtiene la siguiente analogía:

$$\frac{4\alpha^2 - 4\alpha y - y^2}{2\alpha y - y^2} = \frac{\alpha^2}{x^2} \text{ ó bien } \frac{2\alpha - y}{y} = \frac{\alpha^2}{x^2}.^{16}$$

$$\text{A partir de aquí, se obtiene } y = AI = \frac{2\alpha x^2}{\alpha^2 + x^2}, \text{ ó bien } AI = \frac{2x^2}{\alpha} - \frac{2x^4}{\alpha^3} + \frac{2x^6}{\alpha^5} - \frac{2x^8}{\alpha^7} \dots$$

15. Usamos notación moderna, Ozanam escribe $2\alpha y - yy$; una forma de obtener el valor IE es llamar $X = CI = \alpha - y$, $Y = IE$; entonces, como $X^2 + Y^2 = \alpha^2$ será $Y^2 = \alpha^2 - (\alpha - y)^2 = 2\alpha y - y^2$.

16. Ozanam usa $::$ para expresar las proporciones del siguiente modo: $4\alpha\alpha - 4\alpha y - yy, 2\alpha y - yy :: \alpha\alpha, xx$ ó $2\alpha y - y, y :: \alpha\alpha, xx$.

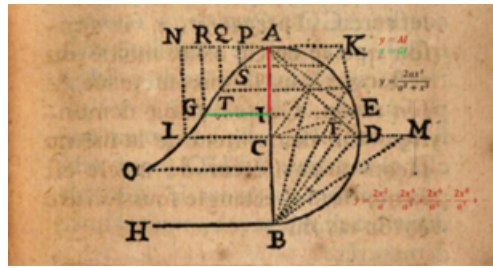


FIGURA 6. Obtención del segmento $y=AI$ (en rojo, el segmento y su valor)

FUENTE: Ozanam, 1684: 193. Explicación gráfica propia.

De esta manera, si se divide el segmento AN en una infinidad de partes iguales en los puntos P, Q, R , etc. y se trazan las paralelas al eje AB dadas por PS, QT, RG , etc., de las que está compuesto el área del complemento $AGLN$, y si se llama x a la primera parte AP , se tendrá entonces $AQ=2x$, $AR=3x$, etc. Ozanam afirma que:

$$PS = \frac{2x^2}{\alpha} - \frac{2x^4}{\alpha^3} + \frac{2x^6}{\alpha^5} - \frac{2x^8}{\alpha^7} \dots$$

$$QT = \frac{8x^2}{\alpha} - \frac{32x^4}{\alpha^3} + \frac{128x^6}{\alpha^5} - \frac{512x^8}{\alpha^7} \dots$$

$$RG = \frac{18x^2}{\alpha} - \frac{162x^4}{\alpha^3} + \frac{1458x^6}{\alpha^5} - \frac{13128x^8}{\alpha^7} \dots$$

etc., y así hasta llegar al último y más grande segmento, $NL = \alpha$.¹⁷

Empleando el Teorema IV, Ozanam encontrará la suma de todos esos segmentos $PS, QT, RG \dots$ que conforman el área del complemento $AGLN$. Lo hará sumando por columnas: en primer lugar, todos los términos de la forma $\frac{mx^2}{\alpha}$ que aparecen en $PS, QT, RG \dots$ como primer elemento de la suma (igual a $\frac{2}{3}\alpha^2$); después, restará los términos de la forma $\frac{mx^4}{\alpha^3}$ (igual a $\frac{2}{5}\alpha^4$); a continuación sumará la columna con los términos de la forma $\frac{mx^6}{\alpha^5}$ (a saber, $\frac{2}{7}\alpha^6$); etc. Así, la suma de todos estos infinitos segmentos, i.e., el área de $AGLN$, será igual a $\frac{2}{3}\alpha^2 - \frac{2}{5}\alpha^4 + \frac{2}{7}\alpha^6 - \frac{2}{9}\alpha^8, \dots$ A partir de esta área, Ozanam deducirá por geometría elemental, y basándose en el Teorema I, que el área de la cuarta parte $ACDEA$ del círculo será $\alpha^2 - \frac{1}{3}\alpha^2 + \frac{1}{5}\alpha^2 - \frac{1}{7}\alpha^2 + \frac{1}{9}\alpha^2 + \dots$;

17. El segmento PS se puede ver como AI ; para los segmentos $QT, RG \dots$ basta sustituir x por $2x, 3x \dots$

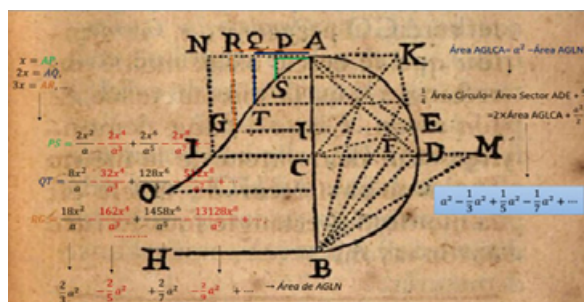


FIGURA 7. Obtención del área de la cuarta parte ACDEA del círculo.

FUENTE: Ozanam, 1684: 193. Explicación gráfica propia.

por tanto, el cuádruple de ese valor,

$$(A): 4\alpha^2 - \frac{4}{3}\alpha^2 + \frac{4}{5}\alpha^2 - \frac{4}{7}\alpha^2 + \frac{4}{9}\alpha^2, \dots,$$

será igual al área de todo el círculo; como, por el Teorema VI, esta área del círculo es igual a la mitad del área del rectángulo formado por la circunferencia y el radio $\left[\frac{1}{2}(2\pi r)r = \pi r^2 = \pi\alpha^2\right]$, se deduce que, si se divide la última expresión (A) por la mitad del radio $\left[\frac{1}{2}r = \frac{1}{2}\alpha\right]$, se obtendrá que

(B) : $8\alpha - \frac{8}{3}\alpha + \frac{8}{5}\alpha - \frac{8}{7}\alpha + \frac{8}{9}\alpha + \dots$ es la longitud de la circunferencia del círculo de diámetro 2α , es decir, $2\pi\alpha$.

Aplicación a la aproximación numérica de π

Del resultado anterior, Ozanam deduce de manera inmediata [usando la fórmula (B) como valor de $2\pi\alpha$] que $2\alpha/(2\pi\alpha) = 1/\pi = 1/\left(4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \dots\right)$.

O incluso [agrupando por parejas los términos del denominador]

$$1/\pi = 1/\left(\frac{8}{3} + \frac{8}{35} + \frac{8}{99} + \frac{8}{195} + \frac{8}{323} + \frac{8}{483} + \frac{8}{675} + \dots\right).$$

Por tanto, cuantos más términos aparezcan en el denominador, más se aproximará a la razón del diámetro de un círculo con su circunferencia. De esta expresión, Ozanam obtendrá las aproximaciones que aparecen en el enunciado del Teorema VII.

Sugerencias para una propuesta de actividades para el aula

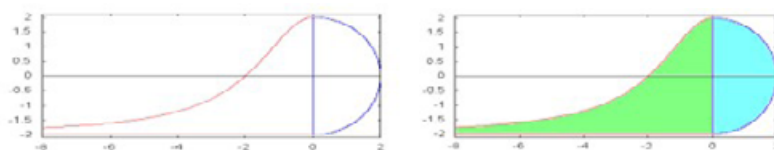
Una vez que conocemos, a grandes rasgos, cómo procedió Ozanam para obtener la cuadratura aritmética del círculo, podríamos emplear este conocimiento para abordar diferentes tareas en el aula.

En un planteamiento general, deberíamos tener en cuenta:

- a) Alumnado al que se dirigen las actividades. Creemos que se pueden generar materiales educativos para el tramo final de educación secundaria o bachillerato, incluso para cursos de primero de carreras de ciencias.
- b) Contemplar una formación humanista en el desarrollo de las actividades, sin centrarnos exclusivamente en los aspectos meramente matemáticos. Por ejemplo, se puede analizar la época y personajes contemporáneos de Ozanam. Realzar el papel de la historia de las matemáticas para salvar obstáculos en el aprendizaje.
- c) Aspectos matemáticos que tratar. Entre otros, se pueden trabajar estos puntos:
 - (i) Geometría elemental, basada en los *Elementos* de Euclides.
 - (ii) Progresiones aritméticas y geométricas, con interpretación a través de sumas de líneas o figuras planas.
 - (iii) Geometría analítica, lugares geométricos: construir la curva generatriz y dar, incluso, una expresión analítica de ella.
 - (iv) Plantear problemas de cálculo infinitesimal e integral, como cálculos de área para comprobar los resultados teóricos de Ozanam (Teorema I, Teorema II).
 - (v) Fomentar el hábito por realizar demostraciones.
 - (vi) Uso de tecnologías para dibujar curvas y calcular derivadas e integrales.

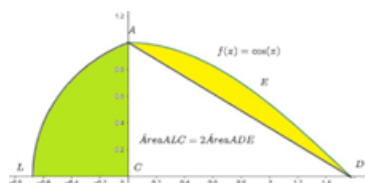
En particular, el planteamiento general puede cristalizar en las siguientes propuestas:

- (1) Un apunte histórico: Arquímedes y su aproximación al número π .
- (2) Encontrar el lugar geométrico descrito por la construcción de la curva generatriz: En términos actuales modernos, coincide con el dibujo de la función $x \mapsto \frac{A^2 - Ax^2}{A^2 + x^2}$, con $x < 0$ (curva en color rojo). [En las figuras, de elaboración propia, hemos dibujado el caso en que $A=2$.]



Por otra parte, si integramos la diferencia de esta curva con la curva constante $y = -A$, desde $-\infty$ hasta 0 (en color verde), encontramos $\int_{-\infty}^0 \left[\left(\frac{A^3 - Az^2}{A^2 + z^2} - A \right) + A \right] dz = \pi A^2$.

(3) En relación con el Teorema I de Ozanam:



- Analizar la prueba dada por Ozanam: aspectos geométricos y paso al límite.
- Comprobar su validez con $y = 1 - x^2$ e $y = 1 - x^3$ en $[0,1]$, $y = \cos x$ en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(4) En relación con la cuadratura de la parábola del Teorema II, verificar que la fórmula es correcta en el caso de la parábola $y = \lambda x(1 - x)$ de base 1, luego $x \in [0,1]$, y altura $\frac{\lambda}{4}$.

(5) Usar la cuadratura aritmética para ilustrar la idea de serie infinita como límite de sumas parciales; calcular errores absolutos y relativos en la aproximación de $\frac{\pi}{4}$; obtener la cuadratura mediante herramientas y procedimientos actuales, por ejemplo, a través de la integral definida de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ entre 0 y 1, teniendo en cuenta el desarrollo en serie de potencias de $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots$ como una suma geométrica de razón $-x^2$.

Conclusiones

La obra matemática de Jacques Ozanam (1640-1718) se desarrolló en una época de transformación de las matemáticas, motivada, entre otras, por la aplicación del análisis algebraico como método de resolución de problemas geométricos y aritméticos. Ozanam fue un autor prolífico: publicó numerosos tratados sobre matemáticas puras y mixtas, escribió un curso matemático, hizo aportaciones al *Journal des Sçavants*... Su obra matemática se caracteriza por un lenguaje matemático avanzado (comprensible para un alumno de secundaria), que relacionó geometría y álgebra, trasladando, por ejemplo, problemas puramente geométricos a relaciones algebraicas, que más tarde interpretaría como expresiones de ciertos lugares geométricos en el plano. Con su método matemático, fue capaz de obtener nuevos resultados, como en el caso de las numerosas adiciones que presentó en su manuscrito sobre la *Aritmética* de Diofanto (Gómez *et al.*, 2021).

En este trabajo, nuestro objetivo ha sido reflexionar sobre ideas históricas y apuntes didácticos conducentes a insertar la historia de las matemáticas dentro del aula, de manera que nos permita atraer la atención de los estudiantes y les permita percibir las matemáticas como una disciplina viva, en nada ajena al contexto social, así como tener una idea general de la materia que le permita superar obstáculos de aprendizaje. Como ejemplo, hemos usado fuentes primarias de Ozanam. Además de comentar algunos aspectos históricos de la fórmula aritmética del área de un círculo de diámetro

1, i.e., $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$, y mostrar todos los ingredientes que utilizó Ozanam para dar la prueba, que contiene, entre otros, progresiones, tanto aritméticas como geométricas, y series infinitas, hemos realizado una propuesta para el aula en la que, además de presentar una prueba

moderna, con los estándares de rigor actuales, se incluyen otras tareas para entender la prueba de la fórmula hecha por Ozanam, todo ello con el objetivo final de atraer la atención y la curiosidad de nuestros alumnos por la disciplina de las matemáticas, y facilitarles la comprensión de las rutinas de cálculo que usan hoy en día.

Referencias bibliográficas

- CLARK, Kathleen [et al.] (2018). «Introduction: Integrating History and Epistemology of Mathematics in Mathematics Education». En: CLARK, Kathleen [et al.] (eds). *Mathematics, Education and History. ICME-13 Monographs*. Cham: Springer, p. 1-23. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-73924-3_1>.
- FONTENELLE, Bernard Le Bovier (1719). «Éloge de M. Ozanam ». *Historie de l'Académie Royale des Sciences*. Année MDCCXVII. París: Imprimerie Royale, p. 86-92.
- FOUCHER DE CAREIL, Louis Alexandre (1854). *Lettres et opuscules inédits de Leibniz. Précédés d'une introduction*. París: Librairie Philosophique de Ladrangue.
- GÓMEZ-GARCÍA, Francisco [et al.] (2021). «The six books of Diophantus' Arithmetic increased and reduced to specious: the lost manuscript of Jacques Ozanam (1640-1718)». *Archive for History of Exact Sciences*, 75, p. 557-611. <<https://doi.org/10.1007/s00407-021-00274-3>>.
- GÓMEZ-GARCÍA, Francisco [et al.] (2023). «Jacques Ozanam: Master of the Diffusion and Algebrization of Mathematics». En: CRIPPA, Davide; MASSA-ESTEVE, Maria Rosa (eds.). *The Algebrization of Mathematics during the 17th and 18th Centuries. Dwarfs and Giants, Centres and Peripheries*. Rickmansworth (UK): College Publications, p. 25-68.
- HEATH, Thomas L. (1897). *The Works of Archimedes*. London: Cambridge University Press.
- LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm (1676/1993). *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis*. Eberhard Knobloch (ed.), Gotinga: Vandenhoeck & Ruprecht.
- LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm (1703). «Remarque de M. Leibniz, sur un endroit des nouveaux Elements d'Algebre de M. Ozanam». *Le Journal des Savants*. París: Chez Jean Cusson, p. 362-364.
- MASSA-ESTEVE, Maria Rosa (2014). «Historical activities in the mathematics classroom: Tartaglia's Nova Scientia (1537)». *Teaching Innovations*, 27 (3), p. 114-126. <[doi:10.5937/inovacije1403114E](https://doi.org/10.5937/inovacije1403114E)>.
- MONTUCLA, Jean-Étienne (1758). *Histoire des Mathématiques*. París: Antoine Jombert.
- OZANAM, Charles-Alphonse (1879). *Vie de Frédéric Ozanam: Professeur de littérature étrangère à la Sorbonne*. París: Poussielgue.
- OZANAM, Jacques (c. 1674). *Les six Livres de L'Arithmétique de Diophante d'Alexandrie augmentez et réduits à la Specieuse*. Manuscrito no publicado.
- OZANAM, Jacques (1684). *La Géométrie Pratique, contenant la trigonométrie théorique et pratique, la longimétrie, la planimétrie et la stéréométrie*. París: Estienne Michallet. <<https://doi.org/10.3931/e-rara-1477>>.

SOBRE LA CONSTRUCCIÓ DE CÒNIQUES EN EL TRACTAT *DE LA APLICACION DEL ALGEBRA A LA GEOMETRIA* DE CERDÀ¹

JOAQUIM BERENGUER

CENTRE DE RECERCA PER A LA HISTÒRIA DE LA TÈCNICA
UNIVERSITA POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Resum: *En aquest article volem donar a conèixer com Tomàs Cerdà (1715-1791), en el seu tractat De la Aplicacion de la Algebra a la Geometria, inspirant-se, per una banda, en els Elementa Matheseos Universae (1713-1715) de Christian Wolff (1679-1754), i, per altra banda, en A Mathematical Treatise: Containing a System of Conic-Sections with the Doctrine of Fluxions and Fluents applied to various subjects (1736) de John Muller (1699-1784), explica la forma de dibuixar les diferents còniques i quines són les diferents eines utilitzades o construccions geomètriques per dibuixar-les. A l'interès que té, des d'una perspectiva històrica, l'estudi de les eines i construccions emprades al segle XVIII per dibuixar aquestes corbes, cal afegir el que pot tenir, des d'un punt de vista pedagògic actual, la recreació d'aquestes eines a una classe del segle XXI.*

Paraules clau: Cerdà, segle XVIII, ensenyament, còniques.

On the construction of the conic-section in the treatise *De la aplicación del Algebra a la Geometria*, by Cerdà

Summary: *In this article we aim to show how Tomàs Cerdà (1715-1791), in his treatise De la Aplicacion del Algebra a la Geometria, being inspired, on the one hand, by the Elementa Matheseos Universae (1713-1715) by Christian Wolff (1679-1754), and, on the other hand, by A Mathematical Treatise: Containing a System of Conic-Sections with the Doctrine of Fluxions and Fluents applied to various subjects (1736) by John Muller (1699-1784), explains how to draw the different conics and what are the different instruments or geometric constructions used to draw them. To the interest that the study of the instruments and constructions used in the 18th century to draw these curves has, from a historical perspective, must be added the interest that the recreation of these instruments in a 21st century classroom can have, from a current pedagogical point of view.*

1. Projecte PID2020-113702RB-I00: «Matemáticas, Ingeniería y Patrimonio: Nuevos Retos y Prácticas, XVI-XIX» del Ministerio de Ciencia e Innovación. Centre de Recerca per a la Història de la Tècnica.

Keywords: Cerdà, Eighteenth century, teaching, Conic-Sections.

Introducció

Tomàs Cerdà, matemàtic i jesuïta, va ensenyar matemàtiques al col·legi de Cordelles de Barcelona, del 1756 al 1764. Durant aquest període va publicar un tractat sobre aritmètica i àlgebra i un altre sobre geometria. Del 1765 al 1767 va ensenyar matemàtiques al Colegio Imperial de Madrid (Berenguer, 2016).

Cerdà també va preparar altres tractats per a ser publicats com el *Tratado de Fluxiones* (Berenguer, 2015), els quals s'han conservat en forma de manuscrit a la Real Academia de la Historia de Madrid. Un d'aquests tractats porta per títol *De la Aplicacion de la Algebra a la Geometria*,² que va ser escrit entre 1760 i 1767.

Com ja hem explicat en altres articles (Berenguer, 2023), l'estudi del text sobre àlgebra aplicada a la geometria de Cerdà resulta especialment rellevant en el marc de l'anàlisi de la introducció de l'algebrització de la geometria a l'Espanya del segle XVIII. Una de les parts que més espai ocupa en aquest darrer tractat és la dedicada a les seccions còniques. Cerdà mostra la manera de dibuixar les diferents còniques i quins són les diferents eines utilitzades o construccions geomètriques per dibuixar-les. I això ho fa inspirant-se, en un capítol, en els *Elementa Matheseos Universae* de Christian Wolff i en un altre en *A Mathematical Treatise: Containing a System of Conic-Sections with the Doctrine of Fluxions and Fluents applied to various subjects* de John Muller. Creiem que l'anàlisi d'aquestes construccions pot suggerir a l'ensenyant del segle XXI, en les seves classes de matemàtiques, formes de treballar unes corbes, conegudes pels alumnes, aprofundint en les seves propietats geomètriques.

Sobre la construcció de la paràbola

En el "Cap [6]. De la ecuación y propiedades de la parábola" del tractat *De la Aplicacion del Algebra a la Geometria* de Cerdà, tenim una primera descripció de com es pot construir una paràbola a partir de l'equació que la defineix i a partir de propietats geomètriques que es poden aplicar segons l'equació d'aquesta cònica. Com la resta del capítol, aquest text està extret de «Caput VI De Algebra ad Geometriam Sublimiorem applicat» de la «Pars Prima Elementa Analyseos Finitorum tradit (Sectio Secunda de Algebra)» dels *Elementa Analyseos Mathematicae tam finitorum quam infinitorum* (8367-8583) dins *Elementa Matheseos Universae* de Wolff (vegeu les figs. 1 i 2):

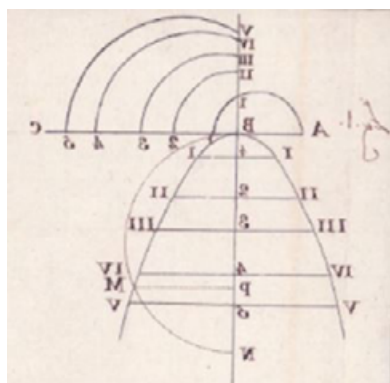


FIGURA 1. Construcció de la paràbola (1).
FONT: Cerdà, 1760-1767: f. 37, «Lam. 2».

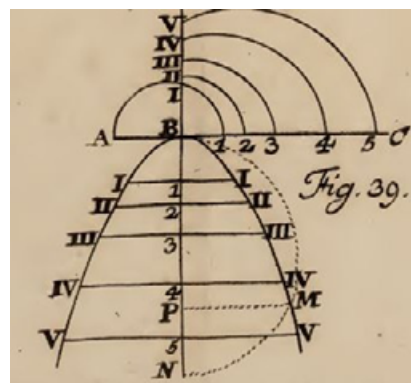


FIGURA 2. Construcció de la paràbola (2).
FONT: Wolff, 1713-1715: «Fig: Alg: Tab: III».

2. En aquest text hem volgut mantenir l'ortografia original dels títols.

El que fa Cerdà és construir els punts de la paràbola (*I, II, III,...*) de manera que compleixin l'equació d'aquesta $y^2 = ax$, on $a = AB$. Les x seran $B1, B2, B3,...$ i les y $1I, 2II, 3III,...$ ³

És a dir, es tracta de dibuixar punts que compleixin l'equació $ax = y^2$, la qual cosa en el semicercle sempre es compleix (vegeu les figs. 3 i 4):

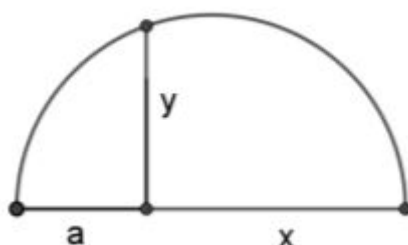


FIGURA 3. Semicercle.

FONT: Figura de l'autor de l'article.

Cerdà dibuixa semicercles amb centre sobre una recta, de manera que tots els cercles passin pel punt A, on $AB = a$ és el paràmetre de la paràbola. Queden així determinats sobre aquests semicercles els segments $BI, BII, BIII,...$ i els segments $B1, B2, B3,...$ pels quals es complirà la propietat $BI^2 = aB1, BII^2 = aB2, BIII^2 = aB3, \dots$,

A continuació, trasllada els segments $B1, B2, B3,...$ sobre l'eix de la paràbola i dibuixa els $1I, 2II, 3III,...$ iguals als $BI, BII, BIII,...$, respectivament. De manera que es complirà $1I^2 = aB1, 2II^2 = aB2, 3III^2 = aB3,...$ És a dir, per tots els punts $I, II, III,...$ es complirà l'equació de la paràbola.

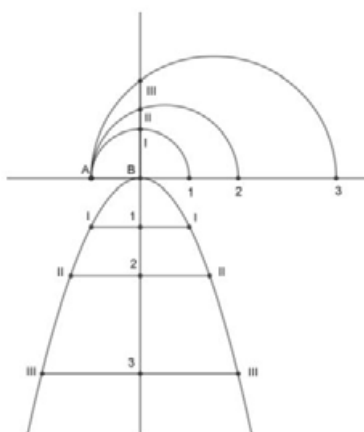


FIGURA 4. Construcció de la paràbola (3).

FONT: Figura de l'autor de l'article.

Per altra banda, en el mateix tractat de Cerdà, en la proposició 2 del capítol «Cap [15]. Propiedades de las Secciones Cónicas», tornem a trobar la forma de dibuixar una paràbola. En aquest cas, Cerdà segueix la «Section I. Of Conic-Sections consider'd in Plano» de *A Mathematical Treatise*:

3. Cal tenir en compte que Cerdà, com molts autors del moment, considerava les abscisses sobre l'eix de la paràbola i les semiordenades perpendiculars a aquestes.

En tot aquest capítol [15], Cerdà s'inspira en Muller. I encara que repeteix alguns temes ja vistos en capítols anteriors, el nivell d'algebrització és molt superior.

Sobre la construcció de l'el·lipse

En el «Cap [7]. De la naturaleza y propiedades de la elipse» del tractat de Cerdà, concretament en els corol·laris 1 i 2 de la proposició 3, Cerdà explica com dibuixar una el·lipse a partir de la propietat geomètrica d'aquesta cònica.

També, com per a la paràbola, Cerdà es guia del capítol «Caput VI De Algebra ad Geometriam Sublimiorem applicat» dels *Elementa Analyseos Mathematicae tam finitorum quam infinitorum* dins els *Elementa Matheseos Universae* de Wolff (vegeu les figs. 9, 10 i 11):

“Cap [7]. De la naturaleza y propiedades de la elipse” (Cerdà) ¹	“Caput VI De Algebra ad Geometriam Sublimiorem applicat” (Wolff) ²
Prop. 3. La suma de las Rectas FM, fM tiradas desde los Focos a un Punto cualquiera M del Perimetro de la Elipse es igual al Eje Mayor AB.	<i>Theorema.</i> Summa rectarum FM & fM ex utroque foco F & f ad idem peripheriæ punctum M ductarum æquatur axi majori AB.
Cor. 1. Dados los Ejes conjugados se podrá describir fácilmente una Elipse porque determinando por la Doctrina antecedente los Focos F y f puestos en ellos las extremidades de un hilo igual al Eje Mayor, si se mete dentro dicho hilo un clavo o punta M y se hace mover tirante a una y otra parte del Eje, semejante punta M describirá el Perimetro de la Elipse, pues siempre será $fM + FM = AB$.	COROLLARIUM I. 435. Datis ergo axibus conjugatis, Ellipsis facillime describitur. Determinatis enim focus F & f (§. 427), clavi in iis desigantur & his filum circumligetur FMf axi majori AB æquale. Quodsi immisso stylo filum extendatur & circa clavos circumducatur, Ellipsis designabitur.

FIGURA 9 Sobre la construcció de l'el·lipse (Cerdà-Wolff).

FONT 1: Cerdà, 1760-1767: f. 40v-41.

FONT 2: Wolff, 1713-1715: § 434, 435.

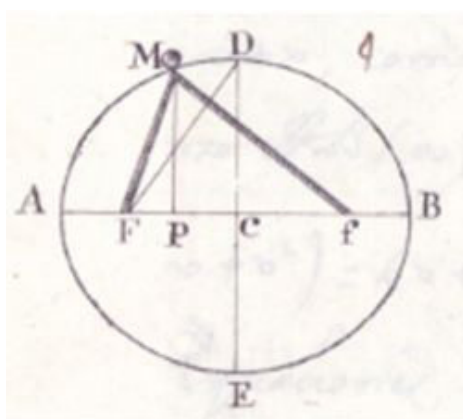


FIGURA 10. Construcció de l'el·lipse (1).
FONT: Cerdà, 1760-1767: f. 37, «Lam. 2».

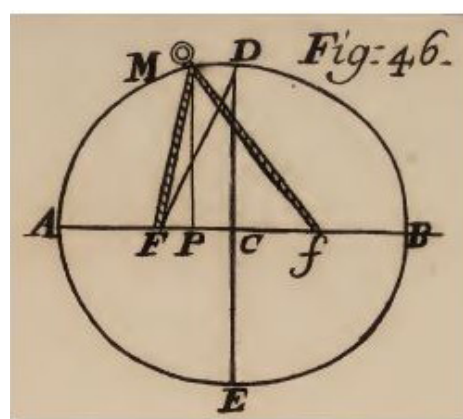


FIGURA 11. Construcció de l'el·lipse (2).
FONT: Wolff, 1713-1715: «Fig: Alg: Tab: IV».

Igualment, en la proposició 2 del capítol «Cap [15]. Propiedades de las Secciones Cónicas», seguint el text de Muller, tornem a trobar la forma de dibuixar una el·lipse (vegeu la fig. 12):

Prop. 2. Dado el Eje y los Focos, construir una sección Cónica

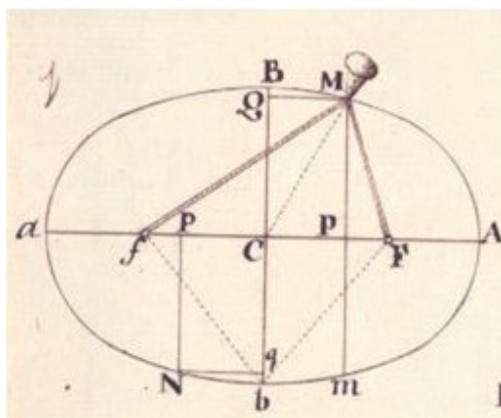


FIGURA 12. Construcció de l'el·lipse (3).

FONT: Cerdà, 1760-1767: f. 102, «Lam. 8».

Para la Elipse tomando un hilo fMF de igual longitud que el primer Eje y atando sus extremidades en los focos F, f la Punta M que tenga siempre tirante el hilo describirá moviéndose una Elipse que será siempre $Aa = fM + FM$ (Prop. 1).

(Cerdà, 1760-1767: f. 101v).

Si es vol recrear aquesta construcció amb el programa Geogebra es pot fer utilitzant el corol·lari 2 de la proposició 3 del capítol [7] (vegeu la fig. 13):

También con el compás se puede determinar cualquier Punto de la Elipse porque dividiendo el Eje AB en cualesquiera dos partes y tomándolas por Radios, puestos los Focos por Centros se podrán describir dos Arcos cuya intersección será un Punto de la Elipse por ser también $fM + FM = AB$.

(Cerdà, 1760-1767: f. 40v-41).

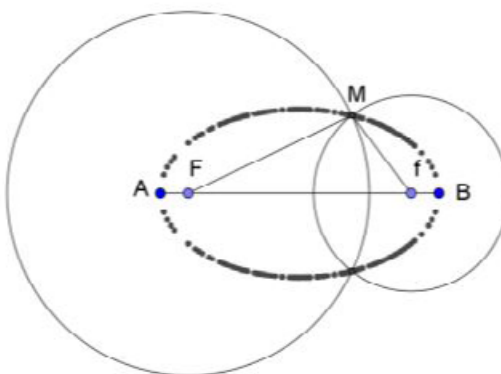


FIGURA 13. Construcció de l'el·lipse (4).

FONT: Figura de l'autor de l'article.

A continuació, en el mateix capítol [15], Cerdà afegeix una nova manera de construir l'el·lipse, també seguint el text de Muller (vegeu les figs. 14, 15 i 16):

“Cap [15]. Propiedades de las Secciones Cónicas” (Cerdà) ¹	“Section I. Of Conic-Sections consider'd in Plano” (Muller) ²
De otra suerte tómense dos Reglas AF y Bf iguales cada una al Primer Eje, teniendo siempre un extremo en los Focos F, f y los otros Extremos A y B que se comuniquen por otra Regla $AB = fF$, de suerte que estas Reglas libremente giren por los cuatro puntos A, B, F, f, la intersección M irá describiendo una Elipse. Porque siendo por la construcción $AB = fF$, $AF = Bf$, los triángulos AfF, fAB serán semejantes e iguales y los Ángulos $AfB = FAf$, por consiguiente $fM = MA$ y siempre en cualquier punto $FM + fM = FA$ que por la hipótesis es igual al Eje con que la curva será Elipse.	<i>Otherwise.</i> Let two Rulers AF, Bf, each of them equal in length to the first axis, have one of their ends fasten'd in the foci F, f, and the others A, B, to a third Ruler $AB = fF$, so that they may freely turn about the four points A, B, F, f; then the interseccion M will be always in the Curve. For becaufe $AB = fF$, $AF = Bf$, the triangles AfF, fAB will be similar and equal, also the angles AfB, FAf are equal; therefore $fM = MA$, and $FM + fM$ will always be $= FA$.

FIGURA 14. Sobre la construcció de l'el·lipse (Cerdà-Muller).

FONT: Cerdà, 1760-1767: f. 101v. FONT 2: Muller, 1736: 10.

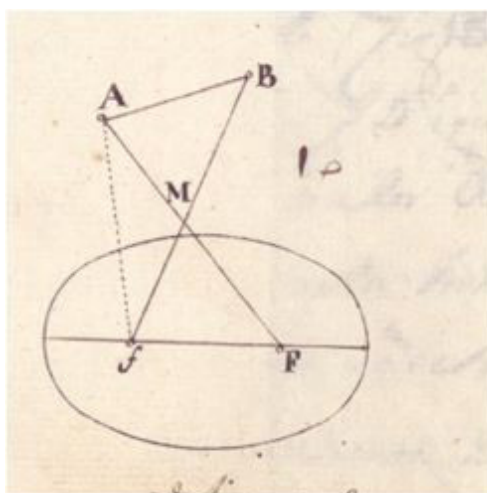


FIGURA 15. Construcció de l'el·lipse (5).

FONT: Cerdà, 1760-1767: f. 102, «Lam. 8».

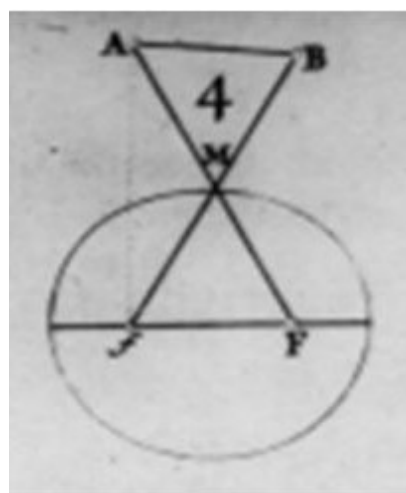


FIGURA 16. Construcció de l'el·lipse (6).

FONT: Muller, 1736: «Plate I, pag:19».

Hem fet una recreació, amb el programa Geogebra, de la figura que dibuixa Cerdà. El punt B gira al voltant del focus f a una distància $fB = d$ constant. El punt A s'ha de trobar a una distància fF de B (dins de la circumferència de centre B i radi fF) i a una distància d de l'altre focus F (dins de la circumferència de centre F i radi d). La intersecció entre aquestes dues circumferències ens dona el punt A . El punt M és la intersecció de FA amb fB (vegeu la fig. 17):

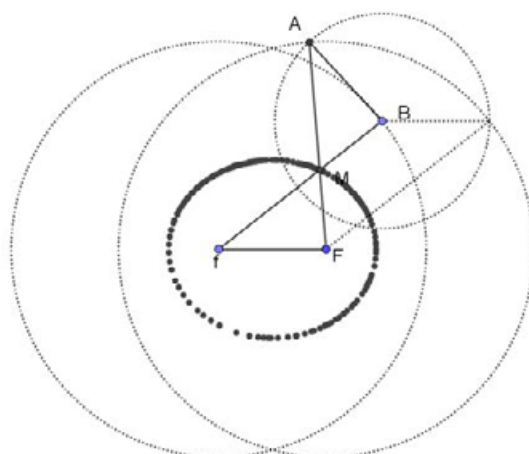


FIGURA 17. Construcció de l'el·lipse (7).

FONT: Figura de l'autor de l'article.

Sobre la construcció de la hipèrbola

En el «Cap [8]. De la naturaleza y propiedades de la hipèrbola» del tractat de Cerdà, concretament en el corol·lari 1 de la proposició 4, Cerdà explica com dibuixar una hipèrbola a partir de la propietat geomètrica d'aquesta cònica i amb l'ajut d'un instrument senzill. També, com per a l'el·lipse, Cerdà es guia del capítol «Caput VI De Algebra ad Geometriam Sublimiorem applicat» dels *Elementa Analyticeos Mathematicae tam finitorum quam infinitorum* dins els *Elementa Matheseos Universae* de Wolff (vegeu les figs. 18-23):

“Cap [8]. De la naturaleza y propiedades de la hipèrbola” (Cerdà) ¹	“Caput VI De Algebra ad Geometriam Sublimiorem applicat” (Wolff) ²
Prop. 4. Si en dos Hipérbolas iguales que tengan un mismo Parámetro, un mismo Eje Transverso y conjugado cuyos Ejes particulares AX y BY se juntan rectamente con el común Eje Transverso AB, se tiran desde los Focos F y f dos Rectas FM y fM a cualquier Punto M de una de ellas, la Diferencia de dichas Rectas es igual al Eje Transverso.	PROBLEMA CCI. 470. <i>Sint duæ Hyperbolæ æquales, eandem parametrum, eundem axem transversum atque conjugatum habentes, quarum axes AN & BY cum axe transverso communi AB in directum jacent. Tab. Ex focis F & f ad punctum M Hyperbolæ III. unius ducantur rectæ FM & fM: determinare quantitatem harum rectarum.</i>

FIGURA 18. Sobre la construcció de la hipèrbola (Cerdà-Wolff 1).

FONT 1: Cerdà, 1760-1767: f. 50v.

FONT 2: Wolff, 1713-1715: § 470, 471.

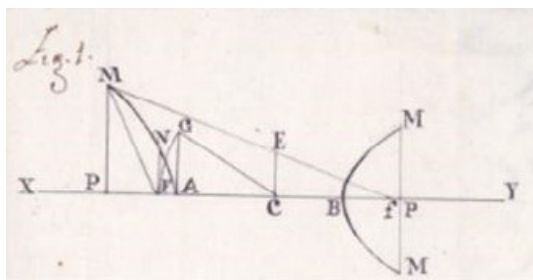


FIGURA 19. Construcció de la hipèrbola (1)
FONT: Cerdà, 1760-1767: f. 56, «Lam. 4».

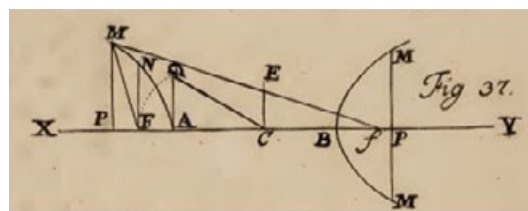


FIGURA 20. Construcció de la hipèrbola (2)
FONT: Wolff, 1713-1715: «Fig: Alg: Tab: III».

Cor. 1. Fundándose en esta propiedad de la Hipérbola se podrá dicha Curva describir con movimiento continuo, dado el Eje Transverso y la Distancia del Foco al Vértice y es poniendo en los Focos f y F unos clavos a uno de los cuales se ate un hilo FMC , cuyo otro extremo C esté atado al Punto C extremo de una Regla que sea mayor que dicho hilo de toda la cantidad del Eje Transverso AB y el otro extremo de la Regla sea móvil alrededor del Punto f con que poniendo una punta o lapiz en M , este irá describiendo la Hipérbola.

COROLLARIUM I.

471. Datis ergo axe transverso & distantia a vertice, Hyperbola motu continuo ita describitur. Scilicet in focis F & f defigantur clavi aut paxilli, quorum alteri in F annectatur filum FMC , altero sui extremo C regulæ Cf alligatum, quæ ipsam superet axe transverso AB . Altera regulæ extremitas perforata clavo f injiciatur, & stilo ad filum applicato regula commovetur.

FIGURA 21. Sobre la construcció de la hipèrbola (Cerdà-Wolff 2).

FONT 1: Cerdà, 1760-1767: f. 50v.

FONT 2: Wolff, 1713-1715: § 470, 471.

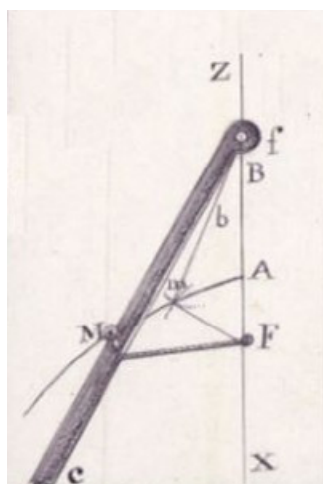


FIGURA 22. Construcció de la hipèrbola (3).
FONT: Cerdà, 1760-1767: f. 56, «Lam. 4».

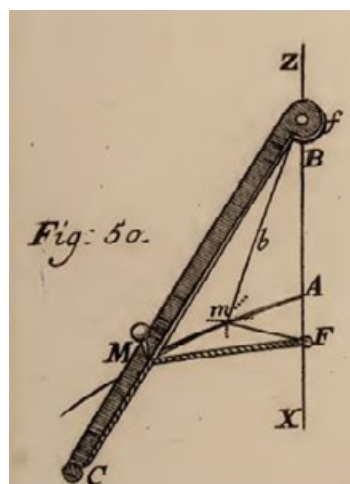


FIGURA 23. Construcció de la hipèrbola (4).
FONT: Wolff, 1713-1715: «Fig: Alg: Tab: IV».

Aquesta forma de construir la hipèrbola explicada en el corol·lari 1 de la proposició 4 del capítol «Cap [8]. De la naturalesa y propiedades de la hipèrbola» torna a aparèixer en la proposició 2 del

capítol «Cap [15]. Propiedades de las Secciones Cónicas», seguint el text de Muller (veure la fig. 24):

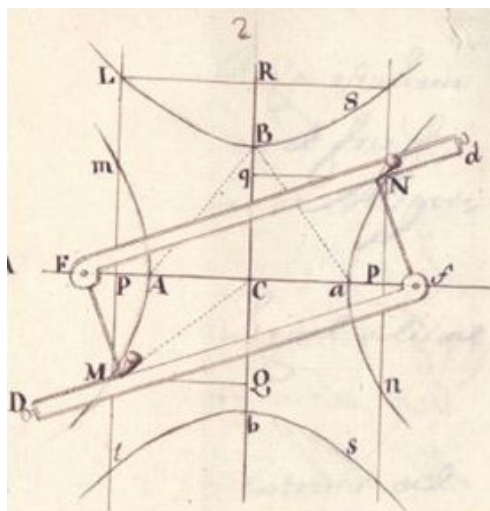


FIGURA 24. Construcció de la hipèrbola (5).

FONT: Cerdà, 1760-1767: f. 102, «Lam. 8».

Para la Hipérbola que uno de los Extremos de la Regla Df y del hilo FMD (cuya diferencia de entrambos es igual al primer Eje Aa) se aten en los Focos f, F y el otro extremo del hilo al Extremo D de la Regla. La Punta M que tenga siempre tirando el hilo describirá con su movimiento la Curva Hiperbólica MAm . (Cerdà, 1760-1767: f. 101v).

Aquesta construcció de la hipèrbola es pot recrear amb el programa Geogebra. Escollim una distància fM . Un cop escollida aquesta distància, la distància FM queda determinada ja que $FM + DM = l$ i per tant $FM = l - DM = l - (L - fM) = l - L + fM$. Que és equivalent a dir que $fM - FM = L - l$. El punt M serà aquell que es trobi a les distàncies fM i FM respectivament de f i de F i així successivament amb altres punts M , prenent diferents distàncies fM (vegeu fig. 25):

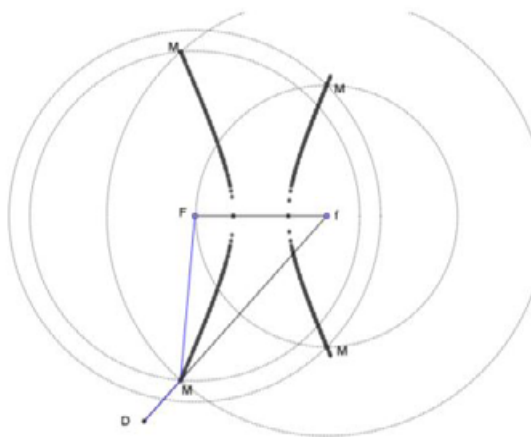


FIGURA 25. Construcció de la hipèrbola (6)

FONT: Figura de l'autor de l'article.

Finalment, la proposició 2 del capítol «Cap [15]. Propiedades de las Secciones Cónicas» acaba de la següent manera (veure les figs. 26, 27 i 28):

“Cap [15]. Propiedades de las Secciones Cónicas” (Cerdà) ¹	“Section I. Of Conic-Sections consider’d in Plano” (Muller) ²
En fin la Elipse y la Hipérbola se pueden describir de otra suerte. Tómese la línea fD igual al primer Eje y del Foco f como del centro con los Radios fN, fN describanse algunos arcos de círculos MNM que corten la línea fD en N y N. En tal caso si se toman las líneas FM, FM iguales a sus correspondientes DN, la curva que pase por los puntos M, M será la cónica que se busca. Porque $fM - fD \mp DN$ o $fM \pm FM (-fM \pm DN) - fD =$ Eje de la Curva.	<i>Otherwise for the Ellipsis or Hyperbola.</i> Take the line fD equal to the first axis, and from the focus f as a Center with the radii fN, fN, describe a great number of circular arches MNM intersecting the line fD in N, N; then if the lines FM, FM are made always equal to their correspondent DN; the Curve-line, passing thro’ all the points M, M, will determine the Section required. For $fM = fD \mp DN$, or $(fM \pm DN) / fM \pm FM = fD =$ to the first axis.

FIGURA 26. Sobre la construcció de la hipèrbola (Cerdà-Muller)

FONT: Cerdà, 1760-1767: f. 102. FONT 2: Muller: 1736, p. 10.

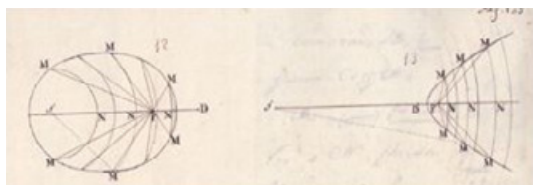


FIGURA 27. Construcció de la hipèrbola (7).

FONT: Cerdà, 1760-1767: f. 105, «Lam. 9».

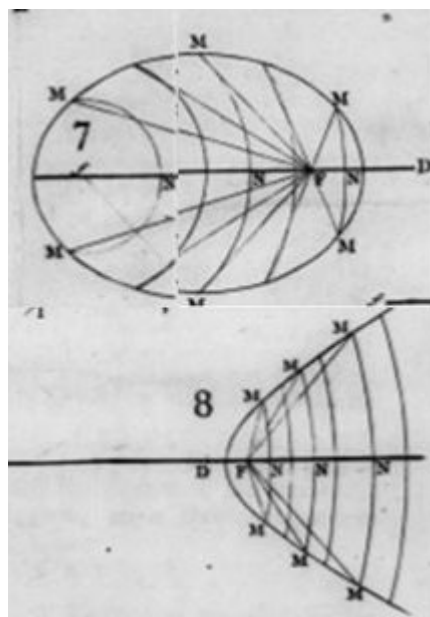


FIGURA 28. Construcció de la hipèrbola (8).

FONT: Muller, 1736: «Plate I, pag:19».

De fet, la construcció tant de l'el·lipse com de la hipèrbola que aquí ens proposa Cerdà és essencialment la mateixa que ja ens havia explicat, és a dir, des dels focus dibuixar circumferències que tenen els radis de forma que la seva suma (el·lipse) o la seva diferència (hipèrbola) sigui igual a una constant que serà l'eix de la cònica. L'originalitat de la proposta és que un mateix procediment o algorisme serveix per a les dues còniques. Quan el punt D (que determina l'eix fD) queda fora del segment fF tindrem una el·lipse, quan el punt D està entre f i F tindrem la hipèrbola. Efectivament, els radis respectius són $fM = fN$ i $FM = DN$ i quan D cau fora del segment fF tindrem $fM = fN = fD - DN$, per tant $fM + FM = fD - DN + DN = fD$. Mentre que si D està entre f i F tindrem $fM = fN = fD + DN$, per tant, $fM - FM = fD + DN - DN = fD$.

Com en les altres construccions, també es pot recrear aquesta amb el programa Geogebra. fD és l'eix de la cònica i en tots dos casos $fM = fN$ i $FM = DN$. En el primer cas $fM + FM = fD$ i en el segon $fM - FM = fD$ (vegeu les figs. 29 i 30):

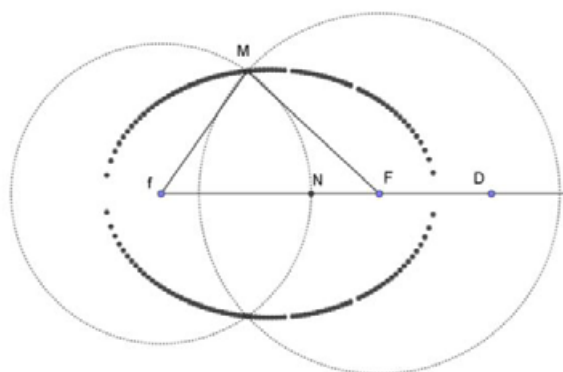


FIGURA 29. Construcció de l'el·lipse (8).

FONT: Figura de l'autor de l'article.

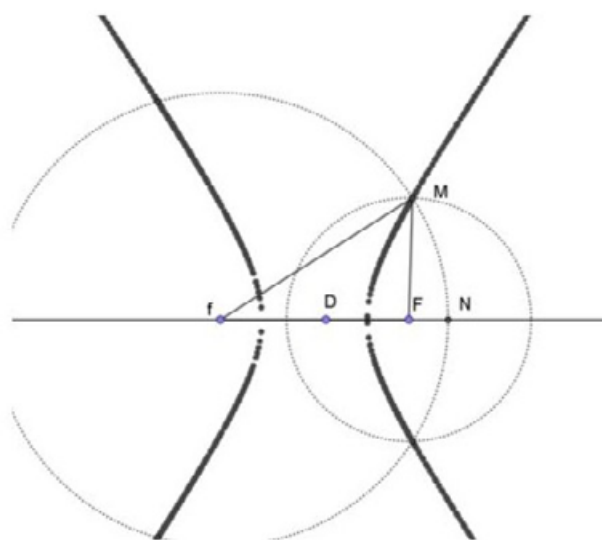


FIGURA 30. Construcció de la hipèrbola (9).

FONT: Figura de l'autor de l'article.

Algunes reflexions finals

Creiem que, en primer lloc, cal posar de relleu l'enorme interès que hi ha a l'Europa del segle XVIII en reproduir gràficament les construccions geomètriques de les còniques en els tractats matemàtics. Cerdà recull de dos matemàtics europeus, Wolff i Muller, aquest interès, i en molts altres tractats de l'època es pot trobar aquest mateix tipus de construcció. Cerdà no en té prou amb seguir a un sol matemàtic, busca els textos que pensa que seran més adequats per als seus alumnes, inclús quan, de vegades, sembla que repeteixi un exercici. El detall de les explicacions de les construccions donades

és una prova que aquestes van dirigides als alumnes o principiants. Efectivament, com sempre, l'objectiu de Cerdà és essencialment pedagògic.

Tot i que les construccions es basen en les propietats geomètriques de les còniques, l'explicació denota un alt nivell d'algebrització en les expressions utilitzades, especialment quan Cerdà segueix el text de Muller.

Per altra banda, es pot comprovar com moltes d'aquestes construccions s'han mantingut en l'ensenyament fins a l'actualitat, i això en demostra la força pedagògica. Tot això ens fa pensar que la recreació d'aquestes construccions a l'actual classe de matemàtiques pot permetre aprofundir en les propietats geomètriques de les còniques i, sobretot, aprofundir en l'estret lligam que hi ha entre una construcció geomètrica i la seva equivalència algebraica.

Referències bibliogràfiques

BERENGUER, Joaquim (2015). Tomàs Cerdà. *Tratado de Fluxiones* (1757-1759). Transcripció, notes i introducció editorial a cura de Joaquim Berenguer Clarià. Barcelona: Reial Acadèmia de Ciències i Arts de Barcelona (RACAB).

BERENGUER, Joaquim (2016). *La recepció del càlcul diferencial a l'Espanya del segle XVIII. Tomàs Cerdà: introductor de la teoria de fluxions*, tesi doctoral en Història de la Ciència. Barcelona: Universitat Autònoma de Barcelona. <<http://www.tdx.cat/handle/10803/367217>>.

BERENGUER, Joaquim (2023). «Les seccions còniques en el tractat *De la Aplicacion de la Algebra a la Geometria* de Cerdà». *Quaderns d'Història de l'Enginyeria* [Barcelona], 21, p. 91-115. <<https://upcommons.upc.edu/handle/2117/398920>>.

CERDÀ, Tomàs (1760-1767). *De la Aplicacion de la Algebra a la Geometria*. Madrid: Real Academia de la Historia (RAH), Cortes 9/2793, f.1-f.145v.

MULLER, John (1736). *A Mathematical Treatise: Containing a System of Conic-Sections with the Doctrine of Fluxions and Fluents applied to various subjects*. London: Printed by T. Gardner, in Bartholomew-Close for the Author; and Sold by W. Innys and R. Manby, in St. Paul's Church-Yard, and J. Nourse without Temple-Bar. <https://archive.org/details/bim_eighteenth-century_a-mathematical-treatise-muller-john_1736/mode/2up>.

WOLFF, Christian (1713-1715). *Elementa Matheseos Universae* [Edició de 1743], Genevæ: Apud Henricum-Albertum Gosse, & Socios. <https://archive.org/details/b30413163_0001/mode/2up>.

APROXIMACIÓN A LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA REAL ACADEMIA DE SAN FERNANDO DE MADRID EN EL SIGLO XVIII

DOMINGO MARTÍNEZ VERDÚ
UNIVERSIDAD DE MURCIA

Resumen: A lo largo del siglo XVIII español se produjo un proceso de renovación en los campos de la ciencia y de la tecnología. Durante el periodo fundacional de la Real Academia de San Fernando de Madrid, 1744-1752, el estudio de las matemáticas se limitaba a la enseñanza de geometría elemental orientada al dibujo. En este contexto, y dado que las matemáticas que se impartían no eran suficientes para la formación de los discípulos en las tres nobles artes —arquitectura, pintura y escultura—, se justifica que la Real Academia emprendiera, a partir de 1752, una serie de intentos con el propósito de actualizar y modernizar la enseñanza de las matemáticas, a fin de proporcionar una sólida base científica y técnica a sus discípulos. El objetivo de esta comunicación es, concretamente, reflexionar sobre los tres intentos que la Real Academia llevó a cabo para elaborar tratados matemáticos —a los que se refería como «cartillas», «quadernos» o «cursos»—. Dedicaremos especial atención al análisis de las novedosas propuestas y de las innovaciones que incorporó Benito Bails (1731-1797) al contenido de los tratados de matemática pura y mixta que figuraban en el plan presentado por la Academia. El análisis concluye que el paso dado por la Real Academia en 1752 para elaborar un cuaderno de geometría culminaría, dos décadas más tarde, en los Elementos de Matemática de Bails, una de las obras matemáticas de carácter enciclopédico más influyentes de la Ilustración española. Dicho análisis nos permitirá apreciar la ruptura que se produjo entre la concepción matemática anclada en el pasado propuesta por la Academia y la modernización de la matemática española planteada por Bails.

Palabras clave: aprendizaje de matemáticas, números negativos, textos históricos

Aproximació a l'ensenyament de les matemàtiques en la Real Academia de San Fernando de Madrid en el segle XVIII

Resum: Al llarg del segle XVIII espanyol es va produir un procés de renovació en els camps de la ciència i de la tecnologia. Durant el període fundacional de la Reial Acadèmia de San Fernando de Madrid, 1744-1752, l'estudi de les matemàtiques es limitava a l'ensenyament de geometria ele-

mental orientada al dibuix. En aquest context, i atès que les matemàtiques que s'impartien no eren suficients per a la formació dels deixebles en les tres nobles arts —arquitectura, pintura i escultura—, es justifica que la Reial Acadèmia emprengués, a partir de 1752, una sèrie d'intents amb el propòsit d'actualitzar i modernitzar l'ensenyament de les matemàtiques, a fi de proporcionar una sòlida base científica i tècnica als seus deixebles. L'objectiu d'aquesta comunicació és concretament reflexionar sobre els tres intents que la Reial Acadèmia va dur a terme per a elaborar tractats matemàtics —als quals es referia com a «cartillas», «quadernos» o «cursos»—. Dedicarem especial atenció a l'anàlisi de les noves propostes i de les innovacions que va incorporar Benito Bails (1731-1797) al contingut dels tractats de matemàtica pura i mixta que figuraven en el pla presentat per l'Acadèmia. L'anàlisi conclou que el pas donat per la Reial Acadèmia en 1752 per a elaborar un quadern de geometria culminaria, dues dècades més tard, en els *Elements de Matemàtica* de Bails, una de les obres matemàtiques de caràcter enciclopèdic més influents de la Il·lustració espanyola. Aquesta anàlisi ens permetrà apreciar la ruptura que es va produir entre la concepció matemàtica ancorada en el passat proposada per l'Acadèmia i la modernització de la matemàtica espanyola plantejada per Bails.

Paraules clau: aprenentatge de matemàtiques, nombres negatius, textos històrics.

Regarding the teaching of mathematics at the Royal Academy of San Fernando in Madrid in the 18th century

Summary: Throughout the Spanish eighteenth century, a process of renewal took place in the fields of science and technology. During the foundational period of the Royal Academy of San Fernando in Madrid, 1744-1752, the study of mathematics was limited to the teaching of elementary geometry oriented to drawing. In this context, and given that the mathematics taught was not sufficient for the training of disciples in the three noble arts —architecture, painting and sculpture—, it is justified that the Royal Academy undertook, from 1752, a series of attempts with the purpose of updating and modernizing the teaching of mathematics, in order to provide a solid scientific and technical basis to its disciples. The aim of this paper is specifically to reflect on the three attempts made by the Royal Academy to elaborate mathematical treatises —which were referred to as «cartillas», «quadernos» or «cursos»—. We will devote special attention to the analysis of the novel proposals and innovations that Benito Bails (1731-1797) incorporated into the content of the treatises on pure and mixed mathematics that appeared in the plan presented by the Academy. The analysis concludes that the step taken by the Royal Academy in 1752 to elaborate a geometry notebook would culminate, two decades later, *Elements of Mathematics* of Bails, one of the most influential encyclopedic mathematical works in the Spanish Enlightenment. This analysis will allow us to appreciate the rupture that occurred between the mathematical conception anchored in the past proposed by the Academy and the modernization of Spanish mathematics proposed by Bails.

Keywords: mathematics learning, negative numbers, historical texts.

Génesis de los Elementos de Matemática de Bails¹

Durante el periodo fundacional de la Real Academia de San Fernando, 1744-1752 (en adelante, Academia), el estudio de las matemáticas se limitaba a la enseñanza de la geometría elemental orientada al dibujo.² Los discípulos recibían una formación muy básica, apenas sin contenido teórico; de hecho, era fundamentalmente práctica y se les instruía para resolver problemas de medición, construcción y trazado de planos, además del aprendizaje de nociones de monte, de construcción

1. Este artículo se ha redactado bajo el proyecto: PID2020-113702RB-I00: «Matemáticas, Ingeniería y Patrimonio: Nuevos Retos y Prácticas, XVI-XIX» del Ministerio de Ciencia e Innovación.

2. La Academia se abrió oficialmente con el nombre de «Real Academia de San Fernando» el 13 de junio de 1752. Para mayor conocimiento sobre la historia de la Academia, sus estatutos y los tipos de estudios impartidos existe una abundante literatura, entre la que destacamos Quintana (1983), Bédar (1989) y Navascués y Utande (2005).

de bóvedas y de cortes de cantería. No es aventurado afirmar que la falta de medios y de profesorado fue la característica que definió a este periodo inicial de ocho años regido por la Junta Preparatoria.³ Este se caracterizó por la exigencia de una dedicación absoluta a las obras del nuevo palacio real de Madrid, lo que dejaba poca disponibilidad para acometer otras empresas, aunque no por ello fueran menos apremiantes.

En este contexto, y dado que las matemáticas que se impartían no eran suficientes para la formación de sus discípulos en las tres nobles artes —arquitectura, pintura y escultura—, se justifica que la Academia emprendiera una serie de iniciativas para actualizar y modernizar su enseñanza, con el fin de proporcionar una sólida base científica y técnica a sus alumnos.

Los «quadernos» de geometría práctica

En noviembre de 1752, la Academia se propuso formar un «quaderno» de geometría práctica y encargó a José de Hermosilla Sandoval (1715-1776) y a Ventura Rodríguez Tizón (1717-1785) que, por separado, escribiesen un tratado cada uno. En este apartado se describe el proceso de formación del cuaderno y se analizan los que presentaron Hermosilla y Ventura Rodríguez.

La Academia se abrió oficialmente con el nombre de Real Academia de San Fernando el 13 de junio de 1752.⁴ Dos meses antes de dicha apertura, Hermosilla y Ventura Rodríguez habían sido nombrados directores de Arquitectura. Dado que la Academia carecía de un método de enseñanza de la geometría —privación que se notaba en la formación de sus discípulos desde los inicios de la institución—, se acordó que los directores Hermosilla y Rodríguez formasen, individualmente, un «quaderno» para la enseñanza con todos los principios de la geometría:

Se acordó, que los dos Directores principales de Arquitectura, y geometría formaran de esta última, un claro, y sucinto Quaderno con todos sus principios, figuras, etc., que examinado sirviese de regla gral. para enseñar y dirigir el curso correspondiente.⁵

El 7 de junio de 1753,⁶ Hermosilla entregó su «quaderno», titulado *Práctica de Geometría*, manuscrito que se custodia en la Academia.⁷ Este manuscrito, atribuido erróneamente a Ventura Rodríguez, era una copia del *Tratado preliminar. Compendio de la Geometría práctica*, primero de los tres que componen *Architectura Civil*, obra también manuscrita de Hermosilla, cuyo original, fechado en Roma el 30 de septiembre de 1750, se conserva en la Biblioteca Nacional de España (en adelante, BNE)⁸. Por su parte, Ventura Rodríguez aportó su *Tratado de Geometría práctica* (Ventura Rodríguez

3. Sobre el periodo de la Junta Preparatoria, véase Bédar (1989) y Navarrete (2007).

4. Archivo de la Real Academia de Bellas Artes de San Fernando (ARABASF 1752): «Abertura solemne de la Real Academia de las tres Bellas Artes, Pintura, Escultura, y Architectura...».

5. ARABASF, Acta de la Junta Particular de 16 de noviembre de 1752, sig. 3-81: 4v.

6. ARABASF, Acta de la Junta Particular de 7 de junio de 1753, sig. 3-81: 7v.

7. Hermosilla, 1753. ARABASF, sig. 3-311-28. El manuscrito no está firmado ni lleva fecha.

8. Biblioteca Nacional de España (BNE), mss/7573, XXX h., 375: II.; 27 x 20 cm. El manuscrito *Architectura Civil* lleva firma autógrafa de José de Hermosilla y de Sandoval. Roma, 30 de septiembre de 1750. Para mayor conocimiento sobre el tratado de arquitectura civil de Hermosilla, véanse (Sambricio, 1986) y (León y Sanz, 1994).

1755)⁹ a mediados de 1755¹⁰ —dos años después que Hermosilla—. El original del tratado de Rodríguez se encuentra en el Archivo RABASF y está fechado en Madrid el 18 de mayo de 1755.

El «quaderno» de Hermosilla: *Práctica de geometría*

En el prólogo de la *Architectura Civil*, Hermosilla reconoce que cuanto ha compuesto no es original ni novedoso:

[...] confieso que no doy â luz novedades, invenciones, ni curiosidades nunca oidas [...] Algunas veces copio, otras enmiendo, muchas traduzco, tal qual disputo, según me figuro mas oportuno para la instrucción de los que lea (Hermosilla, 1750 : 7).

A continuación del prólogo, Hermosilla escribe una introducción que resulta de interés porque expone su concepción didáctica acerca de los conocimientos matemáticos que deben enseñarse a los arquitectos. En dicha concepción prevalece la práctica sobre la teoría, ya que, según él, el arquitecto no necesita tener un profundo conocimiento teórico de las matemáticas en general, basta con los conocimientos científicos y teóricos suficientes para auxiliar a la práctica. Especial atención reciben la aritmética y la geometría, pero siempre con ese enfoque práctico; así, en la aritmética debe ser «un buen contable» (Hermosilla, 1750: 18), y en la geometría, «siendo como el fundamento de toda la Architectura» (Hermosilla, 1750: 18-19), el conocimiento debe ser prolijo en la práctica y no extenderse con una excesiva teoría.

En cuanto al cuaderno, *Práctica de Geometría* comienza con un preámbulo en el que se divide la geometría entre práctica (problemas) y teórica o especulativa (teoremas). Le sigue una parte teórica, que ocupa la mitad del cuaderno, en la que se presentan doce axiomas, cuatro postulados y se explican conceptos elementales de geometría (punto, línea, ángulo, superficie y sólido), todo ello con ilustraciones. La otra mitad del cuaderno se dedica a la parte práctica, dividida en dos secciones: «Práctica de las más principales operaciones» y «De la Construcción de las figuras regulares».

Finaliza el cuaderno con un «Apéndice sobre las Medidas y sus Proporciones», en el que Hermosilla confiesa haber tomado, para formar una tabla con dos columnas («Pies de varias Provincias» y su equivalente en «Partes millesimas»), algunos datos del tratado de arquitectura militar del *Compendio Mathematico* del Padre Tosca. Entre las posibles fuentes de Hermosilla, el propio arquitecto, tanto en el manuscrito *Architectura Civil* como en el cuaderno *Práctica de Geometría*, menciona los «Principios de Geometría» de Sébastien Leclerc (1637-1714), refiriéndose a la *Pratique de la Géométrie sur le papier et sur le terrain de Leclerc*.

El «quaderno» de Ventura Rodríguez: *Tratado de Geometría práctica*

En este apartado analizamos brevemente el cuaderno de Ventura Rodríguez, quien señala en la dedicatoria al rey Fernando VI que ha formado un tratado del modo más breve y añade que la «Ôbra es Señor bien pequeña». A pesar de sus modestas palabras, el *Tratado de Geometría práctica* consta de 136 páginas, de las cuales las situadas a la derecha están numeradas a lápiz desde el 1 hasta el 68. Desgraciadamente, las 129 figuras en láminas a las que se hace alusión en el manuscrito se han

9. ARABASF, sig. 3-311-32. Lleva firma autógrafa.

10. ARABASF, Acta de la Junta Ordinaria de 11 de julio de 1755, sig. 3-81: 39r.

perdido. En el título de la obra, que, leída sin las abreviaturas, dice: *Tratado de Geometría práctica, para la enseñanza de los discípulos de la Real Academia de las bellas Artes del Dibujo con el Título de San Fernando*. Este tratado,¹¹ está encabezado por un proemio en el que se expone cómo ha sido formado el tratado y cuál es su finalidad en términos de utilidad. Ventura Rodríguez confiesa que para formar su tratado ha utilizado las obras de los mejores autores que han escrito sobre geometría, pero ha omitido de las precisas reglas las prolijas demostraciones para centrarse en la práctica.¹² En este sentido, la concepción didáctica del autor coincide con la de Hermosilla al dar importancia a la práctica frente a la teórica evitando el rigor matemático de las demostraciones.

Tras un breve análisis preliminar, se observa que entre las fuentes e influencias de Ventura Rodríguez se encuentran las dos que él mismo nombra a lo largo de sus textos: Euclides y la Geometría práctica del Padre Tosca; además, también se sugiere el uso del *Cours de Mathématique*, de Bélidor y la *Pratique de la Géométrie*, de Leclerc. Estas referencias muestran que Ventura conocía cursos y obras europeas importantes. El tratado de Ventura Rodríguez se estructura en tres secciones. La primera es una especie de introducción sobre qué es la matemática y qué parte de ella es la geometría, para luego distinguir entre cantidad discreta y cantidad continua.¹³ Rodríguez divide la geometría en práctica y especulativa. Seguidamente, explica, de forma euclidiana, los términos que se usan en geometría: definiciones, postulados (llamados también «peticiones» o «demandas»), axiomas, proposiciones (las especulativas son teoremas; las prácticas, problemas) y corolarios.

La segunda sección es una parte preliminar que contiene, en primer lugar, 121 definiciones numeradas desde la 1 hasta la 121, en las que se tratan los conceptos elementales: del punto y de la línea; del ángulo; de la superficie plana y curva; de las figuras (contiene las secciones cónicas);¹⁴ de la razón de la cantidad y proporción, y de los cuerpos o sólidos. En segundo lugar, completan las definiciones tres postulados o peticiones y doce axiomas.

En la tercera sección, Rodríguez aborda la geometría práctica, dividida en tres partes. La «Parte primera» está dedicada a exponer las «Reglas prácticas de Geometría» y engloba desde la Proposición I hasta la LVI; en ellas, Rodríguez va haciendo referencia a diferentes libros de los *Elementos de Euclides*: I, II, V, VI, XI, XII, XIII. La «Parte segunda» de la geometría práctica abarca desde la Proposición LVII hasta la LXIX; aquí explora la «Reducción o transformación de las figuras planas» y la cuadratura del círculo.

Con la «Parte tercera» se completa la geometría práctica, que va desde la Proposición LXX hasta la Proposición CVII. Su contenido versa sobre la «Practica de medir la Cantidad continua» y en ella se ocupa de tres medidas: de las líneas o «Longimetría» y «Altimetría»; de las superficies o

11. Hasta donde conocemos, no hemos localizado ningún estudio detallado de esta obra.

12. «Proemio. En este corto tratado, he recogido de los mejores Autores que han escrito de Geometría las mas utiles y precisas reglas de su practica, y he juzgado combeniente reducirlas á Methodo Vulgar, omitiendo las prolixas demostraciones del rigor Mathematico, para que con facilidad y menos trabajo lo entienda todos, y particularmente los que quieran entrar al estudio del Dibujo; qº. [que] con este tanvierto principio logran el beneficio de la inteligencia en la Nobles Profesion de Architectura, Escultura y Pintura» (Ventura Rodríguez, 1755: 4r).

13. «La Mathematica, que se deriba de Mathema, voz Griega, que quiere decir Doctrina, y Disciplina, es una ciencia, que tiene por objeto la cantidad en quanto á extension, ó numero, prescindiendo de toda materia. Dividese la Mathematica, por maior, en Geometria y Arithmetica; y por menor, cada una en sus partes y dividese tambien la cantidad, en continua y discreta» (Rodríguez, 1755: 5r).

14. Ventura Rodríguez presenta la elipse, la parábola y la hipérbola como secciones de una pirámide cónica.

«Planimetría», y de los cuerpos o sólidos o «Estereometría». Durante el desarrollo, las tres van precedidas de una explicación sobre la construcción y el uso de los instrumentos propios necesarios para su cálculo.

Finalizado el análisis de los cuadernos de Hermosilla y Ventura Rodríguez, cabe hacer una reflexión final acerca de este periodo de formación de los cuadernos de geometría (1752-1756). En general, este tipo de textos constaba de dos grandes partes: una pequeña introducción teórica sobre conceptos elementales de geometría y una parte práctica más extensa que proporcionaba unas reglas o instrucciones que había que seguir en función del problema a resolver. Parafraseando a Hermosilla, el conocimiento debe ser prolijo en la práctica y no extenderse con una excesiva teoría. El modelo descrito fue seguido por Leclerc, Hermosilla y Rodríguez.

El plan del *Curso Matemático de Arquitectura*

Fallado el primer intento de los «quadernos», en un segundo intento mucho más ambicioso que el anterior, la Academia aprobó, en 1759, la formación de un curso matemático o «Cartilla de Arquitectura».¹⁵ Para ejecutar dicha tarea se designaron a cuatro arquitectos: los directores Rodríguez y Villanueva, y los tenientes directores Alejandro González Velázquez (1719-1772) y Joseph Castañeda (?-1766).¹⁶ Los cuatro presentaron, el 24 de febrero de 1759, el plan del Curso de Arquitectura, que fue aprobado en la junta del día siguiente. El acta comienza de la siguiente forma:

El Señor Vice Protector dió cuenta de una representacion de los actuales Directores y tenientes de Arquitectura con fecha de veinte y quatro de este mes [febrero], en que cumpliendo con lo acordado en la particular de catorce de el, proponen el Plan del Curso de Arquitectura que han de trabajar: Piden se les franqueen los Libros asi de los Autores que se les han propuesto [Tosca, Bélidor y Wolff], como de los que les faltaren.¹⁷

Tras algunas dificultades, los cuatro profesores presentaron su propio plan del *Curso de Arquitectura*, que fue aprobado con la condición de que debía repartirse la tarea entre los cuatro arquitectos.¹⁸ El curso matemático debía abarcar, además de la aritmética y la geometría (matemáticas puras), otras materias científicas y técnicas como, por ejemplo, la arquitectura, la perspectiva, la mecánica, la óptica, la astronomía, la música o la hidrodinámica (matemáticas mixtas).¹⁹ Los desacuerdos surgidos entre estos arquitectos y la falta de interés de algunos de ellos provocaron que la Academia exonerase de la tarea a Rodríguez y a Velázquez.²⁰ Transcurrieron otros dos años antes

15. El 17 de enero de 1759 se creyó conveniente la formación del curso para que la arquitectura se estudiase con método. Tomando como ejemplo las academias de Roma, Florencia, Bolonia o París, debían elegirse libros ya escritos por particulares en vez de que los profesores elaboraran otro (ARABASF, Acta de la Junta Particular de 17 de enero de 1759, sig. 3-121: 49r-56v). Días más tarde, el 21 de enero, se aprobó formar el curso (ARABASF, Acta de la Junta Particular de 21 de enero de 1759, sig. 3-121: 56v-57v).

16. ARABASF, Acta de la Junta Particular de 21 de enero de 1759, sig. 3-121: 56v-57v.

17. ARABASF, Acta de la Junta Particular de 25 de febrero de 1759, sig. 3-121: 60r.

18. ARABASF, Acta de la Junta Particular de 25 de febrero de 1759, sig. 3-121: 60r.

19. Para un mayor conocimiento acerca de los cursos matemáticos como textos de carácter enciclopédico que recogen el conocimiento de la nueva ciencia, o sobre el significado de las matemáticas *puras*, *mixtas* o *fisicomatemáticas* en dichos cursos, véase Massa-Esteve *et al.*, 2011: 235-238.

20. ARABASF, Acta de la Junta Particular de 7 de noviembre de 1762, sig. 3-121: 130v.

de que Castañeda presentara impresos, en diciembre de 1764, los «tratados de Arithmetica y Geometria q^e. [que] ha trabajado».²¹

V

PLAN DE LA OBRA.

<i>Primera Parte.</i> Común á todas las de la Arquitectura.	Arithmetica, Geometria, Secciones Cónicas, Aplicacion de la Geometria y Sec- ciones Cónicas á la medida de los edificios civiles, Esfera y Gnomónica.
<i>Segunda Parte.</i> La firmeza de las Fabricas para la construccion.	Statica, Hidrostatica Maquinaria, Calidades de los terrenos, Conocimiento de los materiales, y sus usos, Albanileria, cortes de Canteria y Car- pinteria, Fortificacion de una Plaza, Daños de los edificios y sus remedios.
<i>Tercera Parte.</i> La comodidad pa- ra la distribucion.	Situacion, disposicion de las Fabricas, y sus formas cómodas, Casas de particulares y de Campo, y su distribucion interior, Conduccion de las aguas, y sus cali- dades, Fuentes.
<i>Quarta Parte.</i> La hermosura de las Fabricas para el dibujo.	La delineacion de las tres Ordenes de Arquitectura, Perspectiva, Optica, Adorno de casas y jardineria, Monumentos, Templos, Plazas, Edifi- cios públicos.

DN.

FIGURA 1. Plan del Curso de Arquitectura en el Tratado de Arithmetica, de Castañeda.

FUENTE: Castañeda 1765: v.

Podemos conocer la estructura del plan propuesto por los arquitectos porque se encuentra impresa en el *Tratado de Arithmetica* (1765), de Castañeda (véase la fig. 1), en el que este expone, de forma sinóptica, tanto la intención de la Academia como el plan del curso de arquitectura:

Del método respectivo á la Obra.

Proponiendose la Academia la ejecucion de un Curso de Arquitectura, compuesto de aquellas partes de la Matematica que conducen á constituir un perfecto Arquitecto, se imaginó el siguiente plan; y se advierte que de las quatro partes en que vá dividido, se toman indiferentemente los Tratados á proporcion que se cree mas importante su estudio (Castañeda, 1765: iv-v).

Como se aprecia en la figura 1, el plan del *Curso de Arquitectura civil para la instrucción de los discípulos de la Real Academia de San Fernando* estaba dividido en cuatro partes. «La Primera Parte. Común a las de todas de la Arquitectura», fue asignada a Castañeda. Contenía la aritmética, la geometría, las secciones cónicas, la aplicación de la geometría y secciones cónicas a la medida de los edificios civiles, la esfera y la gnomónica. De todos estos tratados, solo vieron la luz dos: *Curso de Arquitectura Civil, para la instrucción de los discipulos de la Real Academia de San Fernando. Tratado de Arithmetica. En Madrid, en la Imprenta de Joachin Ibarra. Año de 1765*; y *Curso de Arquitectura Civil, para la instrucción de los discipulos de la Real Academia de San Fernando. Tratado de Geometria Teorica y Practica. En Madrid,*

21. ARABASF, Acta de la Junta Particular de 11 de diciembre de 1764, sig. 3-121: 187r-187v.

en la *Imprenta de Joachin Ibarra*. Año de 1765. El resto de los tratados quedaron incompletos e inéditos, bajo la forma de manuscritos en el archivo de la Academia. Así ocurre con el tratado de las secciones cónicas o el cuadernillo, sin principio ni conclusión, de estática, según consta en la *Noticia de los Papeles que ha dejado el difunto D.ⁿ José de Castañeda*.²²

El *Tratado de Aritmética* consta de 107 páginas (VIII + 99) y se estructura en cinco proemiales —a modo de prólogo introductorio— y cinco capítulos. El *Tratado de Geometría Teórica y Práctica* se compone de 246 páginas ([6] + 240) que se complementan con XVIII láminas plegables con grabados. Sobre las posibles fuentes que utilizó Castañeda para componer sus dos tratados, sabemos que en 1762 informó a la Junta de que todo lo había tomado de una serie de autores clásicos: «Wolfio, Bellidor, Desagulier, L'Abbe Tosca, Padilla y otros». ²³

Lamentablemente, Castañeda falleció²⁴ en 1766 y dejó inconclusa la tarea. En 1768 sus dos tratados²⁵ fueron desautorizados y suprimidos por la Academia, después de que esta emitiera un duro dictamen descalificador.²⁶ Por tanto, también el segundo intento resultó, finalmente, fallido, lo que dio lugar a realizar un tercer intento.

Los Elementos de la Matemática de Bails

En esta última sección se analizan las aportaciones innovadoras de carácter europeo con las que contribuyó Bails al plan de 1759 para formar los *Elementos de Matemática*.

Ante la incapacidad mostrada por la dirección de arquitectura para concluir el plan del curso de arquitectura, la Academia se vio obligada a realizar un tercer intento en septiembre de 1768. Para ello decidió crear, tras consulta real, la plaza específica de director de matemáticas con carácter independiente y de la misma «especie» que las otras direcciones de las tres nobles artes²⁷ —escultura, pintura y arquitectura—. El rey aceptó la propuesta: «Con la resolución de S. M. en que se conforma con lo propuesto por la Academia». ²⁸ Para ocupar el nuevo cargo, aunque de forma compartida, se nombraron a Bails²⁹ y a Francisco Subirás [Subirats] Barra (?-1783); sin embargo, este último no llegó a tomar posesión de la plaza y Bails quedaría como primer y único director de matemáticas.³⁰

Dada «la urgente necesidad de formar el curso de Arquitectura»,³¹ la Academia asignó a Bails, en condición de director de matemáticas, la tarea de escribir el curso bajo la supervisión de Jorge Juan y de Pedro Martín-Paredes Cermeño (1722-1790), siguiendo el plan que «para el curso de Arquitectura que habían de escribir los antiguos Directores, y Tenientes de la Academia, aprobó la Junta

22. ARABASF, Fondo general. Estudios artísticos, sig. 4-91-1 y sig. 4-91-2.

23. ARABASF, Acta de la Junta Particular de 7 de noviembre de 1762, sig. 3-121: 130r. Con la expresión «otros», Castañeda quizá se refiera a influencias de otras fuentes que parecen haberse usado, como *Eléments de géométrie ou de la Mesure du Corps, que comprennent tout ce qu'Euclide, en a enseigné: Les plus belles propositions d'Archimède & l'Analyse* (1685), de Bernard Lamy (1640-1715), e *Institutions de Géométrie, enrichies de notes critiques et Philosophiques sur la nature et les développements de l'Esprit humain*, 2 v. (1746, 1757), de Jean-Baptiste de La Chapelle (c. 1710-1792).

24. Castañeda falleció el 13 de marzo de 1766. ARABASF, Acta de la Junta Ordinaria de 6 de abril de 1766, sig. 3-82: 342r-342v.

25. Para un mayor conocimiento sobre los tratados de Castañeda, véanse Martínez-Verdú, 2022 y Martínez-Verdú, 2024.

26. ARABASF, Acta de la Junta Particular de 14 de abril de 1768, sig. 3-121: 326r.

27. ARABASF, Acta de la Junta Particular de 29 de julio de 1768, sig. 3-121: 335v-336r.

28. ARABASF, Acta de la Junta Particular de 22 de agosto de 1768, sig. 3-121: 337r.

29. ARABASF, Acta de la Junta Ordinaria de 2 octubre de 1768, sig. 3-82: 502r.

30. ARABASF, Acta de la Junta Particular de 20 de diciembre de 1768, sig. 3-121: 359r.

31. ARABASF, Acta de la Junta Particular de 19 de septiembre de 1768, sig. 3-121: 344r-344v.

Particular de 25 de febrero de 1759».³² Se procedió a una deliberación en la que se examinaron el plan aprobado en 1759, que había sido entregado a Bails, y un papel elaborado por Cermeño donde «extendió el plan que juzga oportuno para el curso de matemáticas».³³

A finales de 1769, Bails presentó dos planes:³⁴ uno para un «Curso grande» y otro para un «Curso pequeño». Ambos cursos merecieron la aprobación del supervisor, Jorge Juan Santacilia (1713-1773). En el plan del «Curso grande», ya se aprecian ciertas novedades con respecto al plan propuesto por la Academia. En efecto, Bails detectó importantes lagunas tanto en los tres cursos sugeridos como en los modelos de Tosca, de Bélidor y de Wolff, según puso de manifiesto en su crítica a los cursos matemáticos europeos de la época.³⁵

El contenido del «Curso grande» de Bails constituía un claro alejamiento del pasado, proponía una modernización de la matemática española basada en la selección de los mejores tratados europeos disponibles en ese momento, pues además de las materias (aritmética, álgebra, geometría, trigonometría, doctrina de los logaritmos, doctrina de las series, cálculo diferencial e integral, mecánica, dinámica, hidrodinámica, óptica, astronomía, arquitectura y arquitectura hidráulica) también menciona los nombres de los matemáticos a los que se acudiría para formar su curso, que —respetando la ortografía de Bails— son: «Keil, Eulero, Mauduit, Cottes, P. Ricati, Clairaut, P. Reineau, Simpson, Marques del Hospital, Cramer, Maclaurin, los Bernouillis, P. Jaquier, Newton, Alembert, Smith, Lambert, Bouguer, M. la Lande».³⁶ Estos autores europeos son algunas de las influencias de Bails. Con el tiempo, el «Curso grande» pasó a denominarse *Elementos de Matemática*, y el «Curso pequeño», *Principios de Matemática*.

El curso matemático de Bails está compuesto por diez tomos distribuidos en 11 volúmenes. Los tres primeros volúmenes de los *Elementos*, que contienen las matemáticas *puras*, se imprimieron en 1772, pero no se publicaron hasta 1779. Todos los tomos de los *Elementos* se publicaron en tamaño cuarto. Sin contar las páginas iniciales en blanco y las dedicadas a los títulos, los *Elementos* constan de un total de 7066 páginas, de las que 6722 corresponden a los contenidos; los prólogos (general y particulares) ocupan 241 páginas; las notas, erratas e índices se extienden en 103 páginas, y, además, en cuanto a ilustraciones, contiene 2392 figuras distribuidas en 306 láminas o «planas».

El curso matemático *Elementos* siguió la tradición de los cursos de la época que, con carácter enciclopédico, pretendía abarcar la mayor parte de los conocimientos matemáticos de la época, agrupando, además de las matemáticas *puras* —aritmética, geometría, álgebra—, aquellas disciplinas matemáticas que desde el siglo dieciséis incluían un nuevo rango de conocimientos, las consideradas matemáticas *mixtas* y *fisicomatemáticas* porque la *cantidad* se trataba en conjunción con la materia.³⁷ Cabe destacar que los *Elementos* no contienen ningún tipo de dedicatoria, como era costumbre en la época, si exceptuamos el *Elogio de Jorge Juan*.

32. ARABASF, Acta de la Junta Particular de 18 de octubre de 1768, sig. 3-121: 350r-350v.

33. ARABASF, Acta de la Junta Particular de 18 de octubre de 1768, sig. 3-121: 351v-351r.

34. ARABASF, Acta de la Junta Particular de 14 de enero de 1770, sig. 3-122: 2v-7r.

35. En el Prólogo General de la obra, incluido en el tomo I de los *Elementos*, Bails realiza una crítica a diferentes cursos matemáticos europeos: franceses, alemanes, holandeses, italianos, ingleses y españoles (Bails, 1779, tomo I: i-xvi).

36. ARABASF, Acta de la Junta Particular de 14 de enero de 1770, sig. 3-122: 3r-5r.

37. Para un mayor conocimiento sobre los cursos matemáticos europeos enciclopédicos como textos que recogen el conocimiento de la nueva ciencia, o sobre el significado de las matemáticas puras, mixtas o fisicomatemáticas en dichos cursos, así como para conocer los de mayor influencia sobre los cursos de matemáticos españoles, véase Massa-Esteve et al., 2011: 235-238.

Breve descripción de los contenidos de los *Elementos* de Bails

En la tabla 1 se pueden ver los contenidos de los *Elementos* separados por tomos. Para cada tomo se proporciona, entre paréntesis, la fecha de publicación y, entre corchetes, la fecha de impresión, es decir: (año de publicación [año de impresión]). Si coinciden ambas fechas, se suprimen los corchetes.

Tabla 1. Contenidos de los tomos de los *Elementos* de Benito Bails.

Tomos	Contenidos
I (1779 [1772])	Elementos de Aritmética. Elementos de Geometría. Elementos de Trigonometría Plana. La Geometría Práctica.
II (1779 [1772])	Elementos de Álgebra. Del cero, del infinito, y de las cantidades imaginarias. Aplicación del Álgebra a la Geometría. De las series.
III (1779 [1772])	Elementos de Secciones cónicas. Elementos del Cálculo infinitesimal. Del Cálculo diferencial. Del Cálculo integral. La Trigonometría Esférica.
IV (1780 [1773])	Elementos de Dinámica. Del equilibrio, y del movimiento en las máquinas, o de la Estática.
V (1780 [1774])	Elementos de Hidrodinámica. De la Hidrostática. Elementos de Hidráulica.
VI (1780 [1775])	Elementos de Óptica. Elementos de Óptica Práctica.
VII (1799 [1775])	Elementos de Astronomía. Explica felicísimamente el sistema copernicano todos los fenómenos celestes.
VIII (1799 [1775])	Elementos de Astronomía Física. Elementos de Cronología. Elementos de Geografía. Elementos de Gnomónica. Elementos de Perspectiva. Elementos de Música especulativa. Declaración Matemática de la teórica de la Música.
IX (v.1) (1783)	Circunstancias de un buen arquitecto. De la Arquitectura Civil. De la Escultura. De los Edificios públicos. Edificios sagrados.
IX (v.2) (1790)	Tratado de Arquitectura Hidráulica. Canales de navegación. De la navegación interior de España en general.
X (1787 [1776])	Tabla de logaritmos de los números naturales desde 1 hasta 20000. Cómo se manejan las tablas. Cómo se manejan las tablas de los logaritmos de los números naturales. Del complemento logarítmico. Cómo se hallan por medio de las tablas los logaritmos de los números que en ella no están. Explicación y usos de la tabla de las líneas trigonométricas. Origen de los logaritmos. Doctrina de los logaritmos por Aritmética. Origen y doctrina de los logaritmos por la curva logarítmica. Doctrina de los logaritmos por la logarítmica y la hipérbola. Aplicación de la Análisis a la doctrina de los logaritmos. Tabla de los logaritmos de los números naturales desde 1 hasta 20 000. Logaritmos hiperbólicos. Tabla de los logaritmos de los senos y tangentes del cuadrante de círculo, de minuto en minuto.

Algunas reflexiones

A mediados del siglo XVIII, la Real Academia de San Fernando reconocía que las matemáticas que se impartían no eran suficientes para la formación de los principiantes en las tres nobles artes. Así que se propuso elaborar tratados matemáticos que proporcionasen una sólida base científica y técnica a sus discípulos. En este sentido, llevó a cabo al menos tres intentos: la formación de «quadernos de geometría», el plan de arquitectura y los planes presentados por Bails.

En el primer intento de la Academia, nos encontramos con la idea de elaborar un claro y sucinto cuaderno de geometría práctica. El cuaderno de Hermosilla consiste, en realidad, en una cartilla a la que no se puede dar entidad de tratado. Se enseña una geometría muy elemental orientada al dibujo

en línea con el periodo fundacional de la Academia.

Caso distinto resulta el tratado de Rodríguez. Este cuaderno parece adaptarse a las necesidades que tenía la Academia y, como se desprende del título, *Tratado de Geometría práctica*, es un texto eminentemente práctico. Como hemos demostrado, no se trata de una copia directa de otra obra, sino que Rodríguez estaba familiarizado con los textos de Euclides, Leclerc, Tosca y Bélidor. Sin lugar a duda, no se trata de una copia o traducción de otra obra, sino que extrae de otras para componer la suya. Aunque Hermosilla y Rodríguez compartían una visión común: reducir al máximo la teoría y las demostraciones, es decir, evitar el rigor matemático en favor de proporcionar reglas prácticas (a modo de recetas).

El segundo intento corresponde a la aprobación de un *Plan de Curso de Arquitectura*, del que solo se publicaron dos tratados de Castañeda, *Tratado de Arithmetica* y *Tratado de Geometria Teorica y Practica*, finalmente, rechazados por la Academia. Los tratados matemáticos de Castañeda fueron menospreciados injustamente y condenados al olvido.

El tercer y definitivo intento está ligado a la figura de Bails y a los *Elementos* como *Curso matemático* y a los *Principios* como *Compendio*. Con Bails se produjo un punto de ruptura en la concepción didáctica y cognitiva de los conocimientos científicos y técnicos que se impartían para la formación de cualquier oficio civil o militar.

Al componer su curso, Bails obvió las recomendaciones de la Academia de seguir los cursos ya escritos (Tosca, Bélidor o Wolff) y, con criterio propio, propuso una modernización de la matemática española basada en la selección de los mejores tratados europeos disponibles en la época. Indudablemente, conocía en profundidad los trabajos matemáticos publicados y los utilizó en la práctica. Bails presentó dos planes, uno para un «Curso grande», y otro para un «Curso pequeño».

Bails hizo novedosas aportaciones como, por ejemplo, incorporar un tratado de álgebra que incluía las ecuaciones de tercer y cuarto grado, junto con la doctrina de las series; añadió la doctrina de los logaritmos, la teórica de las curvas algebraicas y la de las secciones cónicas; propuso abordar el desarrollo del cálculo diferencial e integral de forma completa; incluyó un tratado de curvas mecánicas, y en arquitectura preparó un tratado de arquitectura hidráulica. Los contenidos de los *Elementos* abarcan un extenso conocimiento de los saberes científicos y técnicos europeos de la época; el curso matemático está dirigido a todo tipo de lectores, más allá de los discípulos de la Academia (arquitectos, aparejadores, militares, marinos, nobles, etc.).

Ambos cursos, *Elementos* y *Principios*, ejercieron una gran influencia en la enseñanza de las matemáticas, al menos hasta principios del siglo XIX, fueron textos de referencia en academias civiles, militares y náuticas. En resumen, el paso dado por la Academia en 1752, con el fin de elaborar un cuaderno de geometría práctica, culminaría, dos décadas más tarde, en el curso matemático de Bails, cuya aportación contribuyó al proceso de articulación de la producción científica y a la comunicación de la nueva matemática europea en la España del siglo dieciocho. Bails modernizó las matemáticas y su enseñanza, y situó a la Academia como uno de los centros docentes españoles más importantes de la época.

Referencias Bibliográficas

BAILS, Benito (1779 [1772], 1799). *Elementos de Matemática*. Madrid: Imprenta de Joachin Ibarra (para los tomos publicados desde 1787, Madrid: Imprenta Vda. de Ibarra). 11 v.

— (1776). *Principios de Matemática*. Madrid: Imprenta de Joachin Ibarra. 3 v.

BÉDAT, Claude (1989). *La Real Academia de Bellas Artes de San Fernando (1744-1808): contribución al estudio de las influencias estilísticas y de la mentalidad artística en la España del siglo XVIII*. Madrid: Fundación Universitaria Española y Real Academia de Bellas Artes de San Fernando.

CASTAÑEDA, José (1765). *Curso de Arquitectura Civil, para la instrucción de los discípulos de la Real Academia de San Fernando. Tratado de Arithmetica*. Madrid: Imprenta de Joachin Ibarra.

HERMOSILLA, José (1750). «Compendio de la Geometría Practica». En: *Arquitectura Civil, Roma, 30 de septiembre de 1750*. Madrid: Biblioteca Nacional de España, 1753 [RABASF, Fondo General, Estudios Artísticos, sig. 3-3: 11-28, aunque asignado por error a Ventura Rodríguez. Manuscrito Mss/7573, 21-58. Existe copia con el título de *Practica de Geometria*].

LEÓN, F. José y SANZ, M. Virginia (1994). *Estética y Teoría de la Arquitectura en los tratados españoles del siglo XVIII*. Madrid: Consejo Superior de Investigaciones Científicas.

MARTÍNEZ-VERDÚ, Domingo (2022). «Aproximación a la génesis de los Elementos de Matemática de Benito Bails». *Academia. Boletín de la Real Academia de Bellas Artes de San Fernando*, 124, p. 37-65.

— (2024). *Significado de la contribución matemática de Benito Bails (1731-1797) en la España del siglo*

XVIII. Tesis doctoral. Murcia: Universidad de Murcia. <<https://hdl.handle.net/10201/142882>>.

MASSA-ESTEVE, M. Rosa; ROCA-ROSELL, Antoni; PUIG-PLA, Carles (2011). «“Mixed” mathematics in engineering education in Spain: Pedro Lucuce’s course at the Barcelona Royal Military Academy of Mathematics in the eighteenth century». *Engineering Studies*, 3 (3), p. 233-253.

NAVARRETE, Esperanza (2007). *Catálogo documental de la Junta Preparatoria de la Real Academia de Bellas Artes de San Fernando (1744-1752)*. Madrid: Archivobiblioteca Real Academia de Bellas Artes de San Fernando.

NAVASCUÉS, Pedro; UTANDE, M. del Carmen (2005). «Breve noticia histórica de los Estatutos de la Real Academia de Bellas Artes de San Fernando». *Estatutos y Reglamento: Real Academia de Bellas Artes de San Fernando*. Madrid: La Academia, p. 11-29.

QUINTANA, Alicia (1983). La arquitectura y los arquitectos en la *Real Academia de Bellas Artes de San Fernando (1744-1774)*. Madrid: Xarait.

RABASF (1752). *Abertura solemne de la Real Academia de las tres Bellas Artes, Pintura, Escultura, y Arquitectura, con el nombre de S. Fernando, fundada por el Rey nuestro señor: celebrese el día 13 del mes de junio de 1752. Siendo su Protector el Exmo. Sr. D. Joseph de Carvajal, y Lancaster, Ministro de Estado, etc. Quien dedica esta Relacion à S.M. que Dios guarde*. Madrid: en casa de Antonio Marín.

SAMBRICIO, Carlos (1986). *La Arquitectura Española de la Ilustración*. Consejo Superior de los Colegios de Arquitectos de España e Instituto de Estudios de Administración Local. Paracuellos de Jarama (Madrid): Closas-Orcoyen.

INSTRUMENT CIENTÍFIC, INTERÈS FILOSÒFIC: LA HISTÒRIA PER ENSENYAR LA Lògica

MARTÍ BRIDGEWATER; ELENA MENTA OLIVA

UNIVERSITAT DE BARCELONA, LOGOS, BARCELONA INSTITUTE OF ANALYTIC
PHILOSOPHY (BIAP)

Resum: La lògica és percebuda sovint com una matèria en tensió temàtica i metodològica davant del caràcter humanístic que s'atribueix als estudis de filosofia. Per abordar els problemes didàctics que genera aquesta percepció de desencaixament, proposem la incorporació d'una major perspectiva històrica en l'ensenyament de la lògica als graus en filosofia. D'una banda, un major èmfasi en la història de la pròpia lògica permetria una millor contextualització de la lògica clàssica i les seves implicacions i controvèrsies filosòfiques. De l'altra, les eines més tècniques pròpies de la lògica es poden usar en l'explicació d'episodis propis de la història del pensament, tot exemplificant el seu profit per a l'anàlisi en profunditat dins d'àmbits com la metafísica, la història de la ciència i d'altres.

Paraules clau: Història de la lògica, didàctica de la lògica, humanitats, ciència.

Scientific Instrument, Philosophical Interest: Using History to Teach Logic

Abstract: Logic is often perceived as being in thematic and methodological tension with the humanistic nature that is typically attributed to philosophical studies. In order to address the didactic challenges arising from this perceived mismatch, we propose the incorporation of greater historical perspective in the teaching of logic within philosophy degree programs. On the one hand, placing more emphasis on the history of logic itself would allow for a better contextualization of classical logic, as well as its philosophical implications and controversies. On the other hand, the more technical tools provided by the study of logic can be deployed in the explanation of episodes from the history of thought, thereby displaying its fruitfulness for in-depth analysis in other fields such as metaphysics, the history of science, and beyond.

Keywords: History of logic, didactics of logic, humanities, science.

Introducció

La lògica forma part de la formació bàsica dels graus universitaris en filosofia, però difereix de la resta d'assignatures d'aquests graus en diversos aspectes estilístics, metodològics i conceptuals. L'alumnat tendeix a percebre aquesta diferència com un desencaixament que sembla reproduir la distinció tòpica entre humanitats i ciències (Snow, 1990). Dins d'aquesta distinció, és del tot comú trobar la filosofia com a categoritzada dins l'àmbit de les humanitats,¹ i de vegades fins i tot s'hi troba en contraposició explícita a l'àmbit de les ciències, o STEM (Bermúdez, 2022; Kang, 2011). Per altra banda, la lògica formal contemporània presenta una estreta vinculació amb les matemàtiques i és entesa generalment com una ciència formal (Bunge, 1985), i en el seu ensenyament hi juga un rol important l'adquisició de la competència tècnica, que constitueix la base de l'avaluació i les metodologies d'aprenentatge. Per això, no és estrany que l'alumnat percebi l'assignatura com a aliena als interessos que han regit la seva tria d'estudis universitaris, amb les repercussions pedagògiques que això comporta en termes de desmotivació i dificultats per l'aprenentatge (Meens, 2018).

Aquestes associacions contraposades entre la filosofia com a humanística i la lògica com a científica es produeixen tant en termes de la percepció del sentit teòric de cadascuna, com en termes més estilístics o de format. Generalment, l'alumnat ha estat majoritàriament exposat a textos canònics de la tradició filosòfica, com *La República de Plató* o *Sobre veritat i mentida en sentit extramoral* de Nietzsche. Però als seus manuals de lògica hi troba un estil propi que usa notació matemàtica, interromp la seqüència narrativa del text, pot incloure exercicis, i segueix formulacions molt estandarditzades per la distinció entre definicions, proposicions, i demostracions, entre d'altres (Badesa *et al.*, 1998: 106, 322).

És comú justificar el sentit de les assignatures de lògica als graus en filosofia destacant-ne el valor instrumental, en tant que mitjà per adquirir precisió i rigor en l'argumentació, que són clau per l'activitat filosòfica. Els arguments filosòfics sovint presenten complexitats i subtils pròpies, i tractar-los en el grau rellevant d'abstracció requereix la capacitat de distingir-ne la forma i el contingut. Ara bé, sovint costa associar més específicament aquests objectius pedagògics genèrics amb els detalls tècnics que vertebraven les assignatures de lògica, que rara vegada es presenten aplicats plenament dins el context de la pràctica filosòfica real.

La proposta que presentem es basa en la historització de la lògica per afrontar els diversos problemes de desencaixament que hem volgut assenyalar. D'una banda, situar els continguts de les assignatures dins la història de la lògica trauria a la llum qüestions substantives (no merament metodològiques) d'interès filosòfic intrínsec. De l'altra, introduir estudis de cas de la història del pensament permet l'aplicació contextualitzada de la lògica com a eina imprescindible per copsar els sentits filosòfics de problemes clàssics de diversos àmbits. Per tant, una aproximació més històrica transmetria de manera més significativa el valor instrumental que, de fet, justifica la presència de la lògica als graus i, a més, en mostraria l'interès filosòfic no estrictament instrumental.

La qüestió de la historicitat de la lògica també remet al problema de la relació entre humanitats i ciències. Incorporar trets estilístics i competències que l'alumnat percep com a menys tècniques disminueix l'oposició entre la lògica i la resta d'àmbits de la filosofia, la qual cosa resulta convenient

1. A tall d'exemple, el grau universitari en filosofia està classificat dins la branca d'arts i humanitats en el cercador del Canal Universitats del Departament de Recerca i Universitats. Vegeu <<https://universitats.gencat.cat/ca/estudis-universitaris/cercador-estudis-universitaris/index.html>> [Consulta: 10 de març de 2024].

didàcticament a efectes de la seva motivació. Més fonamentalment, una millor harmonització entre aquestes diferents tonalitats dissol la distinció dicotòmica entre humanitats i ciències, tal com de fet és més pertinent en la reflexió sobre la posició de la filosofia respecte la resta del coneixement.

En aquesta introducció, hem ofert un diagnòstic de les línies generals del problema que percebem, i el sentit en què la història pot contribuir a resoldre'ls. A la propera secció, discutirem el tractament de la historicitat de la lògica a classe, amb vista a tematitzar-ne l'interès intrínsec no-instrumental. A la següent secció, es proposen tres casos històrics que mostren l'aplicació de conceptes i competències tècnics de la lògica per a l'articulació d'altres reflexions.

La història en la lògica

Històricament, a la tradició filosòfica de matriu grega ha dominat una certa concepció aristotèlica de la lògica com un instrument propedèutic previ i extern *stricto sensu* a la filosofia en si.² Aquesta noció dominant es manifesta, per exemple, en el paper que ocupa la lògica dins les arts liberals del currículum carolingi, que es presenta en plena continuïtat amb l'alfabetització com a part del *trivium*, conjuntament amb la gramàtica i la retòrica (Adamson, 2019), i encara al segle XVIII Kant nega explícitament que hi hagi hagut desenvolupaments substancials en lògica ençà d'Aristòtil, ni que, de fet, siguin possibles, donada la seva manca de contingut com a tal, per contraposició amb la filosofia (Kant, 1992).

Certament, al llarg dels segles han existit controvèrsies filosòfiques entorn a qüestions lògiques, com ara la qüestió dels futurs contingents o la paradoxa del mentider, entre moltes altres. Però en termes generals, la lògica se segueix entenent com quelcom fonamentalment instrumental per a l'articulació conceptual clara del discurs, i menys com una qüestió filosòficament substancial en si. Fins i tot corrents que revisen o ataquen la lògica d'Aristòtil, com la sil·logística modal d'Avicenna, o fins i tot la tradició renaixentista que culmina en la *Lògica de Port-Royal*, se circumscriuen a la demarcació aristotèlica de la lògica: l'estudi de sil·logismes composts per enunciats descriptius, arranjats com a premisses i conclusions, i formulats en llenguatge natural (Kneale i Kneale, 1962).³

Aquesta concepció de la lògica perdura fins la seva substitució per un nou paradigma molt més reconeixiblement contemporani. El trencament es produeix al llarg del segle XIX i la primera meitat del segle XX, període en què ocorren de manera més o menys gradual dos desenvolupaments crucials per a la història de la lògica: l'estreta interrelació entre lògica i teoria matemàtica, i la gènesi i auge de la lògica clàssica. Si bé es tracta de processos simultanis i estretament relacionats, es pot i convé diferenciar-los.

La preocupació de l'època pels problemes de fonamentació, i especialment la qüestió del fonament de les matemàtiques, duen a un trencament metodològic profund, en què la validesa de la

2. És comú mencionar que el terme canònic usat per a les obres lògiques d'Aristòtil (*Organon*, que significa «instrument») resulta especialment il·lustratiu d'aquesta concepció. També és remarcable que, en el seu context històric, aquesta era una qüestió polèmica, i la posició aristotèlica es contraposava a l'estoica, que mantenia que la lògica era una de les parts pròpies o internes de la filosofia, conjuntament amb la física i l'ètica (Bobzien, 2020).

3. Val la pena notar que això tampoc no és negar que hi hagi desenvolupaments importants pel que fa a diverses menes de formalització. Ja el propi Aristòtil introdueix l'ús de variables en lloc d'exemples particulars, la tradició postaristotèlica medieval elabora un argot lògic específic que hi confereix un elevat grau d'abstracció, i durant el període modern es desenvolupen influents sistemes diagramàtics de relacions conceptuais. Tot i això, no es tracta de processos equiparables als nivells d'abstracció propis de la lògica contemporània.

lògica i les matemàtiques es veuen estretament vinculades i, per tant, passen a estar-ho també els seus problemes i metodologies. Autors com Boole, Frege, Russell, Hilbert i Gödel contribueixen a definir la lògica com a instanciada en un llenguatge formal simbòlic (en lloc del llenguatge natural), a ser manipulats seguint regles especificades en un sistema de càlcul deductiu basat en axiomes, i analitzat teòricament en termes d'objectes matemàtics com els conjunts i les funcions. Aquesta nova metodologia cristal·litza en una lògica que es passaria a anomenar «clàssica» per contraposició tant a la lògica de la tradició aristotèlica anterior, com a lògiques alternatives que sorgeixen en resposta. Més concretament, autors com Brouwer i Łukasiewicz⁴ discrepen filosòficament d'algunes assumpcions de la nova lògica imperant, i formulen les primeres versions de lògiques no-clàssiques en la mateixa època i marc metodològic (Priest, 2008).

Després de la Segona Guerra Mundial, la lògica clàssica es difon i esdevé canònica, en tant que una metodològicament clau per l'auge de la filosofia analítica del llenguatge (Quine, 1953). Però entre finals dels anys 60 i inicis dels anys 70, desenvolupaments de la mà d'autors com Kripke propicien un *boom* en l'àmbit de les lògiques no-clàssiques, que passen a poder plasmar les seves discrepàncies filosòfiques amb un grau de riquesa tècnica comparable al de la lògica clàssica. D'aleshores ençà, aquesta darrera segueix sent la posició estàndard, però dins un mapa més divers, marcat per nombroses controvèrsies filosòfiques que es formulen de manera tècnicament sofisticada (Sylvan i Priest, 2000).

En resum, doncs, la lògica com a àmbit segueix centrada en la noció d'argument vàlid, però des del segle XIX, es discuteix principalment en un marc metodològic compartit amb les matemàtiques i instanciat en un llenguatge simbòlic, en lloc del que ocorria en la tradició d'arrel aristotèlica. Dins d'aquest àmbit, s'entén per una lògica una certa combinació de llenguatge formal reglat amb una semàntica matemàticament definida i unes regles de transformació sintàctica. Al seu torn, la lògica clàssica és una d'aquestes lògiques, caracteritzada per certes posicions concretes com ara l'afirmació dels principis de bivalència, del terç exclòs i de no-contradició, entre d'altres.

A la llum d'aquestes distincions, doncs, es pot apreciar el problema que suposa ensenyar la lògica de manera ahistòrica. En absència d'una contextualització més general i articulada, l'èmfasi tan sols en l'adquisició de la competència tècnica en la lògica clàssica pot dur a identificar la lògica clàssica amb la lògica com a àmbit. Una analogia possible seria amb l'ensenyament de la física: per bé que hom podria basar un curs introductori de física en la mecànica de Newton, certament formaria part del curs transmetre a l'alumnat que amb això no s'ha cobert el marc general de la física com a disciplina, i que existeixen *altres físiques* que en formen part. Ningú no creuria que fos bo que un alumne adquirís competència tècnica en mecànica newtoniana, sense saber que això és només una imatge parcial de la disciplina, i que altres teories de fet hi xoquen substancialment.⁵

Un objectiu didàctic de mínims per a un curs d'introducció a la lògica, doncs, hauria de ser proveir l'alumnat d'un mapa que l'orienti en el panorama teòric de la disciplina, mostrant també l'existència de controvèrsies. Proveir aquest mapa des de la història permet entendre amb sentit les preses

4. Val la pena remarcar que, en el cas d'aquest darrer, part de les raons filosòfiques que el duen a formular alternatives a la lògica clàssica beuen, precisament, d'Aristòtil, i més generalment de l'interès en la història del pensament propi de l'Escola de Lviv-Varsòvia (Wolenski, 2023).

5. En aquest sentit, una altra analogia que es podria considerar és entre el paper que juguen les paradoxes en lògica, i el que juguen en física experiments com el de la doble esclatxa. Com a resultats sorprenents, tots dos semblarien mostrar ràpidament que no és viable adherir-se sense més discussió a versions «ingènues» dels models clàssics respectius.

de posició teòrica que caracteritzen les diferents lògiques. Presentar les controvèrsies històriques explicita les assumpcions i il·lumina les maneres de fer de la lògica com a àmbit, tal com ocorre en la història de la ciència en general (Machamer *et al.*, 2000).

A més, un objectiu més ambiciós podria ser presentar els conceptes tècnics bàsics de l'assignatura evitant projectar relacions de subordinació entre les diferents lògiques. Per exemple, tant la noció formal de conseqüència lògica com les connectives convencionals es poden definir de manera comuna a lògiques amb diferents posicionaments sobre si és possible tenir proposicions ni vertaderes ni falses, vertaderes i falses, o que ho siguin en diferents mesures.⁶ Si s'ensenyen dins d'aquest mapa més ampli, les decisions teòriques preses en presentar la lògica clàssica es justifiquen més transparentment tant per raons de tractabilitat com de motivació filosòfica.

Addicionalment, incorporar una perspectiva històrica més diacrònica que englobi la tradició anterior al segle XIX també permetria articular més clarament la relació entre el llenguatge natural i els llenguatges simbòlics emprats a l'aula. D'una banda, això reforçaria el valor instrumental dels tecnicismes de l'assignatura per contextos de raonament més aplicats. De l'altra, la recuperació del valor intrínsec d'idees històriques a la llum de les metodologies tècniques contemporànies ha estimulat alguns projectes de recerca de gran importància, com la recuperació d'idees d'Aristòtil i Boeci en la lògica connectiva (Wansing, 2023), o les implicacions que té el tractament donat per Nagarjuna al *Catuskoti* per a la lògica multivalorada (Priest, 2010).

La lògica en la història

Així com explicar la història de la lògica permet identificar amb més contundència el seu interès intrínsec, explicar lògica també pot servir per apreciar millor esdeveniments de la història del pensament. La familiaritat amb els tecnicismes de la lògica es pot mostrar realment útil aplicada a l'estudi de casos històrics dins i fora d'ella. Aterrar aquestes eines formals en l'anàlisi d'episodis de la història del pensament proporciona una comprensió més minuciosa del que hi va passar, i fa que certes qüestions filosòfiques centrals es deixin tractar millor i amb més lucidesa.

L'especificitat que demana treballar amb casos històrics concrets permet anar més enllà de la idea que, en estudiar lògica, el que s'adquireix únicament és la competència de detectar la validesa d'arguments que versen estrictament sobre altres qüestions. Moltes idees discutides en la història del pensament tenen relacions conceptuals o competencials amb la lògica que no es restringeixen a l'estructura argumental particular amb què es presenten. A continuació, s'exposaran tres casos que exemplifiquen com es podria contextualitzar de manera significativa l'aplicació dels coneixements obtinguts en l'assignatura.

Els tres exemples que proposem, a mode d'il·lustració i sense pretensió d'exhaustivitat, són: a) la *Grundenlagenkrise*, en la qual s'articula com a programa la fonamentació de les matemàtiques davant de diversos problemes i paradoxes sorgits a cavall entre els segles XIX i XX; b) la diagonalització de Cantor (1891), que va demostrar que el conjunt dels nombres reals és no-numerable, revolucionant així la concepció de mida d'infinit; i c) la paradoxa de Condorcet, enunciada per primer cop al segle XVIII (Condorcet, 1785), per la qual la racionalitat dels individus no garanteix la racionalitat de les seves preferències agregades.

6. Específicament, es pot donar una marc comú per a les lògiques clàssica, *Strong Kleene*, *Logic of Paradox*, *First Degree Entailment* i de valors continus de Łukasiewicz, i llavors diferenciar-les segons els valors semàntics que s'accepten i es designen (Priest, 2002).

Tots tres casos comparteixen una vinculació clara i directa amb conceptes d'ús comú en manuals de referència i introduccions a la lògica a nivell universitari (per exemple, Badesa *et al.*, 1998; Swart, 2018). Hi apareixen conceptes propis de la teoria de conjunts (com ho són la pròpia definició de conjunt, els tipus de funcions i les propietats de les relacions), i també dels sistemes axiomàtics i càlculs deductius. Un altre tret comú és que els recursos tècnics propis de la lògica hi apareixen imbricats amb conceptes d'interès propi d'altres àmbits, com les matemàtiques pures, la metafísica o la ciència política. Així doncs, els conceptes lògics mencionats juguen papers no anecdòtics en l'articulació de qüestions arquetípicament filosòfiques, més enllà de la mera anàlisi de l'estructura dels arguments.

En el cas de la *Grundenlagenkrise*, es posen en joc conceptes com el d'axioma, conjunt i càlcul en relació amb problemes propis de la fonamentació del coneixement. Aquesta crisi de la fonamentació de les matemàtiques no es pot entendre sense fer referència als reptes que plantegen, respectivament, les geometries no-euclidianes a la noció de sistema axiomàtic, i la paradoxa de Russell a la definició de conjunt. La voluntat de donar resposta al seguit d'inconsistències resultants d'això cristal·litza en el programa de Hilbert, basat en l'aplicació d'un nou mètode d'axiomàtica formal (Roselló, 2019).

Haver operat a classe amb la definició dels conjunts per intensió permet entendre la formulació pròpia de la paradoxa de Russell, evitant així la reducció a l'analogia de la paradoxa del barber.⁷ Al seu torn, haver treballat amb nocions estrictament sintàctiques de deducció, en lloc de recórrer a la intuïció semàntica, fa comprensible el que s'entén per formalitat en el marc del programa de Hilbert. Aquests conceptes remetent directament al problema filosòfic general de la fonamentació del coneixement i plantegen una imatge paradigmàtica del que podria ser una garantia rigorosa de les veritats i els conceptes.

Pel que fa a la diagonalització de Cantor, el concepte de bijecció, que podria semblar de detall estrictament matemàtic, ajuda a comprendre amb precisió el concepte aparentment confús d'infinits més grans que d'altres. La possibilitat de bijectar el conjunt dels nombres naturals sobre el dels enters (i, al seu torn, també sobre el dels racionals) mostra que hi ha un sentit en què tenen la mateixa mida, o sigui, la mateixa cardinalitat. L'argument de la diagonalització de Cantor demostra que el conjunt dels nombres reals no és numerable, això és, que no existeix cap bijecció entre ell i el conjunt dels naturals i que, per tant, és un conjunt de cardinalitat superior als anteriors. Aquest resultat, que es pot obtenir a partir de la noció relativament senzilla de funció bijectiva, tal com s'introdueix a classe de lògica, il·lumina confusions metafísiques habituals entorn de la noció d'infinít, com ara les referides a la identitat entre infinits diferents, o l'existència de privacions o límits per als ens infinits.

En tercer lloc, a la paradoxa de Condorcet la racionalitat de les preferències es defineix fonamentalment en termes de transitivitat i completesa com a propietats de relacions. Donat un conjunt d'individus amb preferències transitives sobre tres o més opcions, diversos sistemes d'agregació d'aquestes preferències poden generar unes preferències agregades intransitives, o sigui, cícliques (Pacuit, 2019). No és estrany assumir que existeix alguna relació entre les nocions de lògica i racionalitat, i el concepte de transitivitat que es treballa en lògica rau al centre de la definició de racionalitat que s'usa en teoria de la decisió. Més generalment, la discussió tècnica de la paradoxa de Condorcet duu directament a l'àmbit de la filosofia política i la ciència política, en relació amb la democràcia i els sistemes de votació.

7. Més enllà del valor d'accedir directament a l'argument original, aquesta analogia pot resultar problemàtica (Raclavsky, 2014).

L'exercici de dur casos d'estudi diversos a l'aula, a part de servir de context d'aplicació de les eines formals i els tecnicismes adquirits, també pot ser fèrtil per fer vincles més interdisciplinaris, apel·lant a interessos més transversals o relacionats amb les humanitats. Si es busquen les connexions apropiades, es pot dissoldre la concepció de la lògica com a ciència massa centrada en els seus propis tecnicismes i aliena a altres preocupacions. A més a més, presentar en el seu context allò que sovint es presenta ahistòricament ofereix una ocasió per a pensar més ambiciosament en què és contextualitzar. Especialment, transcendir la història de les idees, tot adoptant una perspectiva més pròpia de la història social, enriqueiria la comprensió del seu lloc en les seves institucions, les seves comunitats i la seva cultura material, entre d'altres.

Conclusió

En aquest treball, hem assenyalat alguns dels reptes que planteja el xoc entre les cultures de ciències i humanitats en l'ensenyament de la lògica al grau de filosofia, i hem fet algunes propostes de millora basades en la incorporació de la història a l'aula. D'una banda, hem argumentat que la incorporació de la història de la pròpia lògica com a ciència formal mostra millor l'existència de controvèrsies i enriqueix l'apreciació del seu interès filosòfic. De l'altra, hem il·lustrat amb alguns exemples històrics com la lògica pot aportar una comprensió més plena i precisa de la matèria. En fer-ho, es veu com l'aportació de la lògica pot transcendir la distinció forma-contingut, i pot tant constituir contingut filosòfic substantiu, com articular els continguts d'altres àmbits a un nivell més fi que tan sols la presentació formal dels arguments.

Ja que les observacions precedents fan referència a la interdisciplinarietat, seria didàcticament convenient expandir la preocupació pel desencaixament entre ciències i humanitats a l'escala global del grau de filosofia, més enllà de l'assignatura de lògica. En aquest sentit, escalar-ho pot suposar un repte de coordinació pedagògica major, en requerir una millor sincronització i seqüenciació dels aprenentatges, garantint que les referències mútues tenen sentit tant a nivell motivacional com cognitiu. Aquest repte és encara més gran de cara a l'extensió eventual d'aquestes consideracions a altres disciplines. És feina de tothom que les aportacions pròpies dels diferents àmbits quedin ben integrades, i no pas com un *collage* d'anècdotes.

Agraïments

Volem expressar el nostre agraïment a en Guillem Sales Vilalta per ajudar-nos en la revisió d'aquest article, i també a en Sergi Oms Sardans i en José Martínez Fernández, pel seu suport tant pel que fa a les reflexions que s'hi presenten, com l'experiència docent d'on parteixen. En aquest sentit, també estem contents d'agrair al nostre alumnat la seva ajuda i retroalimentació al respecte. També ens hem beneficiat d'allò més dels comentaris i aportacions dels assistents i organitzadors de la XXI Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament «Antoni Quintana i Marí», a qui estem també molt agraïts. Aquest article ha estat possible gràcies al finançament del projecte Worlds and Truth Values: Challenges to Formal Semantics (MUNVAL) (2019PID-107667GB-I00), i també del Barcelona Institute of Analytic Philosophy (BIAP), corresponent a l'ajut CEX2021-001169-M, amb el finançament de MCIN/AEI/ 10.13039/501100011033.

Referències bibliogràfiques

- ADAMSON, Peter (2019). *Medieval philosophy: A history of philosophy without any gaps*. Oxford: Oxford University Press.
- BADESA, Calixto; JANSANA FERRER, Ramon; JANÉ, Ignacio (1998). *Elementos de lógica formal. 2a ed.* Barcelona: Ariel.
- BOBZIEN, Susanne (2020). «Ancient Logic». *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. <<https://plato.stanford.edu/archives/sum2020/entries/logic-ancient/>> [Consulta: 10 de març de 2024].
- BUNGE, Mario (1985). «Formal Science from Logic to Mathematics». *Treatise on Basic Philosophy*, 7. Dordrecht: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-94-009-5281-2_2>.
- CONDORCET, Nicolas de (1785). *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*. París: Imprimerie Royale.
- CANTOR, Georg (1891). «Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre». *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 1, p. 75-78.
- HYDE, Dominic, & PRIEST, Graham (2000). *Sociative Logics and Their Applications: Essays by the Late Richard Sylvan*. Londres: Routledge. <<https://doi.org/10.4324/9781315181950>>.
- KANG, Young Ahn (2011). «The Place of Philosophy between Science and the Humanities». *Diogenes*, 58 (1-2), p. 88-99. <<https://doi.org/10.1177/0392192112448294>>.
- KANT, Immanuel (1992). *Lectures on Logic*. (J. M. Young, Ed.). Cambridge: Cambridge University Press.
- KNEALE, William; KNEALE, Martha (1962). *The Development of Logic*. Oxford: Clarendon Press.
- MACHAMER, Peter; PERA, Marcello; BALTAS, Aristides (2000). *Scientific controversies: philosophical and historical perspectives*. Oxford: Oxford University Press.
- MEENS, Evelyn E.M. [et al.] (2018). «The association of identity and motivation with students' academic achievement in higher education». *Learning and Individual Differences*, 64, p. 54-70.
- PACUIT, Eric (2019). «Voting Methods». *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. <<https://plato.stanford.edu/archives/fall2019/entries/voting-methods/>> [Consulta: 10 de març de 2024].
- PRIEST, Graham (2008). *An Introduction to Non-Classical Logic: From If to Is*. Cambridge: Cambridge University Press.
- (2010). «The logic of the *catuskoti*». *Comparative Philosophy*, 1 (2), p. 24-54. <[https://doi.org/10.31979/2151-6014\(2010\).010206](https://doi.org/10.31979/2151-6014(2010).010206)>.
- RACLAUSKY, Jiri (2014). «The barber paradox: on its paradoxicality and its relationship to Russell's paradox». *Prolegomena: Casopis za filozofiju*, 13 (2), p. 269-278.
- ROSELLÓ, Joan (2019). *Hilbert, Göttingen and the development of modern mathematics*. Cambridge: Cambridge Scholars Publishing.
- QUINE, Willard Van Orman (1953). *From a Logical Point of View*. Harvard: Harvard University Press.
- SNOW, Charles Percy (1990). «The Two Cultures». *Leonardo*, 23 (2-3), p. 169-173. <<https://doi.org/10.2307/1578601>>.
- SWART, Harrie de (2018). *Philosophical and Mathematical Logic*. Cham: Springer Undergraduate Texts in Philosophy.
- WANSING, Heinrich (2023). «Connexive Logic». *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. <<https://plato.stanford.edu/archives/sum2023/entries/logic-connexive>> [Consulta: 10 de març de 2024].
- WOLENSKI, Jan (2023). «Lvov-Warsaw School». *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. <<https://plato.stanford.edu/archives/win2023/entries/lvov-warsaw/>> [Consulta: 10 de març de 2024].

HISTORIA Y FILOSOFÍA DE LA CIENCIA: UNA NECESIDAD Y TRES VÍAS PARA IMPLANTARLA EN LA EDUCACIÓN NO UNIVERSITARIA

EDUARDO DORREGO LÓPEZ

IES AFONSO X O SABIO; UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Resumen: Entre las herramientas didácticas que se suelen proponer para una mejora de la comprensión de la ciencia por parte del estudiante no universitario, pocas veces aparece la historia y/o la filosofía; por ejemplo, a través de los cursos de formación del profesorado, gran parte de la oferta va por otro camino. Sin embargo, desde hace ya un tiempo han aparecido estudios que ponen muy en valor el rol que puede jugar en este contexto el realizar un acercamiento desde las humanidades a la ciencia en general, y a la matemática en particular, que es la disciplina científica sobre la que pondremos el foco. El objetivo de este capítulo será el mostrar tres proyectos que se llevan a cabo en el IES Afonso X O Sabio de la Barcala, Cambre (A Coruña), en el que se trabajan la historia y la filosofía de la ciencia usando, entre otros recursos, fuentes originales, y que derivaron en el establecimiento de una asignatura en el bachillerato dedicada por entero a ello.

Palabras clave: StemBach, historia y filosofía de la ciencia, herramientas didácticas.

Història i filosofia de la ciència: una necessitat i tres vies per a implantar-la en l'educació no universitària

Resum: Entre les eines didàctiques que se solen proposar per a una millora de la comprensió de la ciència per part de l'estudiant no universitari, poques vegades hi apareix la història i/o la filosofia; per exemple, a través dels cursos de formació del professorat gran part de l'oferta va per un altre camí. Tot i això, des de fa ja un temps han aparegut estudis que posen molt en valor el rol que pot jugar en aquest context realitzar un acostament des de les humanitats a la ciència en general, i a la matemàtica en particular, que és la disciplina científica sobre la qual posarem el focus. L'objectiu d'aquest capítol serà mostrar tres projectes que es duen a terme a l'IES Afonso X O Sabio de la Barcala, Cambre (La Corunya), en què es treballen la història i la filosofia de la ciència usant, entre altres recursos, fonts originals, i que van derivar en l'establiment d'una assignatura al batxillerat dedicada completament a això.

Paraules clau: *StemBach*, història i filosofia de la ciència, eines didàctiques.

History and philosophy of science: a necessity and three ways to implement it in non-university education

Summary: Among the didactic tools that are usually proposed to improve the understanding of science of non-university students, history and/or philosophy rarely appear; for example, the large part of the teaching training courses goes another way. However, from some time onwards, studies have appeared that highly value the role played by humanities to approach science in general, and mathematics in particular, which is the scientific discipline we will be putting the focus on. The goal of this chapter will be to present three projects that are carried out at the IES Afonso X O Sabio in la Barcala, Cambre (A Coruña), in which the history and philosophy of science is presented by drawing, among other resources, upon original sources, and which led to the establishment of a subject entirely devoted to it.

Keywords: StemBach, history and philosophy of science, didactic tools.

Introducción

Enseñar una asignatura de ciencias puede resultar un reto por muchas razones, y tratar de determinar algunos de esos retos con el objetivo de llevar a cabo medidas que permitan abordar las dificultades que entrañan requiere realizar una búsqueda que no solo se quede en la superficie. Para ello, se hace necesario el uso de herramientas particulares que permitan sacar a la luz sutilezas que a primera vista podrían mantenerse en un segundo plano.

En una búsqueda superficial, parece claro que el reto más inmediato tenga que ver con la dificultad que más a la vista está; aquella que más claramente muestra la ciencia cuando se le plantea al docente la tarea de explicarla y al estudiante el ejercicio de comprenderla.¹ De hacer la búsqueda en base a este simple criterio, una más que posible respuesta sería el nivel técnico. Sin pretender realizar un ranking de ciencias difíciles, duras o exigentes, una de las primeras que la mayoría asociaría a este tipo de dificultades «a la vista» serían las matemáticas² por su nivel de abstracción cuando tratamos con el álgebra, la visión espacial que demanda si tratamos con geometría clásica, etc. Todo esto, por supuesto, acompañado del imprescindible ejercicio memorístico. Ahora bien, hay otro tipo de dificultades que no están tan a la vista. Pongamos un par de ejemplos que, aunque sencillos, servirán para aclarar esto. Supongamos que queremos explicar el concepto de «potencia». La explicación lleva consigo la dificultad de presentar una nueva notación, un cierto número de propiedades e, incluso, su aplicación para, entre otras cosas, definir potencias de exponente negativo y fraccionario. Pero hay un problema más sutil: cómo pasamos de un concepto simple a uno más complejo que, si bien no pierde su denominación, poco tiene que ver ya con lo que originalmente era. No podemos hablar de 2^{-3} o de $4^{1,5656...}$ usando el «viejo» marco de definición: $a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ (n veces). ¿Por qué nos permitimos el lujo de generalizar de esta manera? ¿Quizá por utilidad? En ese caso: ¿qué lo justifica?, o, íntimamente relacionado: ¿Cuándo surge esto?

Otro ejemplo que se podría plantear exactamente en los mismos términos es el relacionado con el concepto de número. Supongamos que queremos introducir los números complejos a un grupo

1. Plantearíamos este escrito desde el punto de vista del docente, a no ser que se haga mención explícita a lo contrario. En cualquier caso, no cabe duda de que la misma problemática se podría plantear desde el punto de vista del estudiante.

2. Dado que mi especialidad son las matemáticas, será esta la ciencia a la que haga referencia en esta discusión tanto explícita como implícitamente, aunque, por supuesto, parte de las ideas aquí contenidas se podrían trasladar a otras.

de estudiantes que, por el curso en el que se encuentran, desconocen el tema. Hay muchas complejidades que saltan a la vista: el recurso a la trigonometría, a la geometría o al cálculo, algo imprescindible para un primer acercamiento, pero hay otras complejidades, menos a la vista, que son de enorme importancia: ¿cómo justificar que $\sqrt{-1}$ es un número? O, de nuevo: ¿Por qué nos permitimos el lujo de generalizar de esta manera? ¿Quizá por utilidad? En ese caso: ¿qué lo justifica?, o, íntimamente relacionado: ¿Cuándo surge esto?

No se trata de resolver estas cuestiones en unas pocas líneas, sino de mostrar cómo una mirada atenta teniendo a mano las herramientas adecuadas permite sacar a la superficie problemas cuyo tratamiento en clase puede llegar a mejorar la enseñanza y, por lo tanto, la comprensión de la ciencia que se aborda. En el caso de las matemáticas, una de las preguntas que más la identifica es «¿por qué?», razón por la cual la historia y la filosofía se tornan ayudas particularmente adecuadas. En este capítulo se presentarán brevemente los tres proyectos que se están llevando a cabo en el centro de educación secundaria y bachillerato IES Afonso X O Sabio, y que crean espacios propios para la historia y filosofía de (en particular) las matemáticas en el marco de tres actividades de innovación y educación educativa: un club de lectura en torno al libro *Apología de un Matemático*, un (apartado del) club de ciencias en el que se presentan los *Elementos* de Euclides y un bachillerato STEM (Science, Technology, Engineering and Mathematics) al abrigo del cual se imparte la asignatura de historia y filosofía de la ciencia.

Las humanidades en interacción con la ciencia: creando espacios fuera del aula

¿Cuál sería una opción adecuada para realizar una lectura crítica que pueda resultar atractiva y útil a estudiantes tanto de ciencias como de humanidades y que verse sobre matemáticas? A mi entender, el libro *Apología de un Matemático* de G. H. Hardy, un libro corto con capítulos muy breves e independientes; un libro que «pertenece a una clase particularmente rara [...] en el muy poblado universo del ensayo» (Sánchez Ron, 2017: 7), cumple con estas características y lo hace idóneo para un club de lectura (Xunta de Galicia, 2023a).

Para Hardy, que fue un matemático británico que vivió a caballo entre los siglos XIX y XX desarrollando su actividad académica en el Trinity College de Cambridge como Catedrático de Matemáticas y en Oxford como Catedrático Saviliano de Geometría, la razón de ser de las matemáticas eran ellas mismas, y la belleza, su principal guía: «los modelos del matemático, al igual que ocurre con los del pintor o con los del poeta, deben ser hermosos; las ideas, al igual que los colores o las palabras, deben encajar de forma armoniosa. La belleza es el primer examen». Ya mayor, Hardy escribe este libro en el que pone en papel sus opiniones acerca de lo que para él es la matemática. La obra, con el tono melancólico del que sabe que sus momentos de genialidad ya han quedado atrás, refleja la visión del que ve en su disciplina, las matemáticas, lo que un pintor, un músico o un poeta ve en la suya.

El objetivo de esta lectura es entrar en contacto con una visión romántica de las matemáticas de la mano de un autor que veía en ellas, no el medio para llegar a un fin, sino el fin en sí mismo. Se esté de acuerdo o no con Hardy, esta visión de la matemática ha estado presente desde antiguo, con lo que parece razonable darla a conocer. El libro ofrece múltiples posibilidades para discutir cuestiones que se enmarcarían dentro de la filosofía de las matemáticas, aunque va mucho más allá, y las exigencias

técnicas son mínimas, con lo que se hace adecuado para todos los ámbitos.³

En otro proyecto distinto, el Club de Ciencias (Xunta de Galicia, 2023b), y con la intención de corregir lo que a nuestro entender es una deficiencia, se presentan los *Elementos* de Euclides. Los *Elementos* es un libro riguroso, es de hecho lo que durante siglos se ha considerado como paradigma del rigor; modélico, en tanto que autores de todas las épocas han tratado de aplicar los métodos de Euclides a sus propias disciplinas, por muy apartadas de las matemáticas que pudieran estar a simple vista, y ha formado a generaciones y generaciones de estudiantes, siendo el libro de texto usado para la enseñanza de las matemáticas. De hecho, partes de este libro aún se usan hoy en algunos de los cursos de la ESO, aunque sin dar mayor importancia al contexto en el que se enmarcan los resultados.⁴ Ciertamente es que los *Elementos* es un libro duro, y que es necesario ser cuidadoso si uno no quiere causar en el estudiante una reacción negativa. De hecho, a este libro también le han llovido críticas y, en algunos casos, se le ha culpado de ser el causante de la animadversión generada hacia esta disciplina.⁵

En cualquier caso, el impacto que ha tenido en nuestra cultura ha sido enorme, a pesar de lo cual Euclides y sus *Elementos* son prácticamente desconocidos en los niveles de educación secundaria, y la publicidad que de ellos se hace, es mínima. Es por ello por lo que hemos puesto en marcha este proyecto, repartido en ocho sesiones de una hora de duración cada una, con el objetivo de:

- Leer partes de los *Elementos* de Euclides, para lo cual tomamos como referencia la edición publicada por la editorial Gredos (*Elementos* I, 1991 y *Elementos* II, 1991).⁶ Combinamos la lectura adaptada con una lectura literal con la intención de que experimenten y contrasten, tras lo cual se adapta para una comprensión adecuada de las proposiciones. Algunos de los resultados que explicamos, pensando en aquellos que puedan estar más estrechamente conectados con el currículum, son: Prop. 1 Libro I (construcción triángulo equilátero), Prop. 32 Libro I (suma de los ángulos de un triángulo plano), Prop. 47, Libro I (teorema de Pitágoras) y Prop. 20, Libro IX (infinitud números primos).⁷
- Analizar el contexto histórico y social en el que se escribió el libro para poder obtener una visión más amplia del mismo, así como estudiar el impacto y la influencia del libro y de su autor para lograr obtener una imagen más precisa de la importancia de dicho escrito. Para esta parte, además de la propia introducción y notas de la mencionada edición de Gredos, echamos mano de un libro de reciente publicación cuya lectura consideramos particularmente agradable, clara, y atractiva: *Las infinitas vidas de Euclides: Historia del libro que forjó*

3. Otra opción que nos parece muy interesante para un club de lectura sería *The Usefulness of Useless Knowledge* de Abraham Flexner (2017). Un libro breve, de lectura cómoda y sumamente agradable, que subraya la utilidad del conocimiento, particularmente de aquel que parece estar más alejado de las aplicaciones inmediatas, para el uso práctico.

4. Me refiero, por ejemplo, a lo relativo a la construcción de polígonos regulares con regla y compás.

5. Sobre esto es muy interesante acudir a Schubring (2055: 68-69), en donde se mencionan las críticas que Petrus Ramus vierte al proyecto *Scholarum Mathematicarum* (1569), «la primera reflexión metodológica impresa sobre las matemáticas» (p. 68).

6. Como material complementario usamos, por su indudable interés histórico, la traducción de los *Elementos* que toma como base el manuscrito completo más antiguo que nos ha quedado, el ms D'Orville 301, fechado el 888 dC, de la Bodleian Library (Oxford). La versión digitalizada se puede consultar en Clay Mathematics Institute <<https://www.claymath.org/online-resources/euclids-elements/>>.

7. Para algunas de las proposiciones de geometría el uso de la herramienta Geogebra suele ser habitual.

nuestro mundo de Benjamin Wardhaugh (2022).

Pero si bien estos proyectos dan cabida a la introducción de aspectos histórico-filosóficos en la enseñanza de las matemáticas —o de cualquier otra ciencia sin más que adaptar los mencionados proyectos—, un paso clave sería la creación de una asignatura que permitiese tratar la historia y la filosofía de la ciencia como una disciplina *per se*. Este fue precisamente el objetivo de la implantación del StemBach o bachillerato de excelencia (Xunta de Galicia, 2023c). En el StemBach, el estudiante, además de cursar un bachillerato «al uso»:

- Cursa una asignatura nueva que se imparte fuera del horario lectivo. En nuestro caso, la asignatura que hemos implantado es *Historia y Filosofía de la Ciencia*, con una carga lectiva de 2 horas a la semana.⁸
- Realiza un proyecto de investigación o TFB⁹ que escogen entre aquellos ofertados por las universidades gallegas¹⁰ y que presentan y defiende en sesión pública en el segundo año.

Uno de los principales objetivos de las etapas educativas preuniversitarias en lo que a materia de ciencia se refiere, es proporcionar al alumnado herramientas básicas con las que eventualmente puedan desarrollar un conocimiento científico más amplio. Sin embargo, las propias limitaciones temporales no permiten realizar un acercamiento holístico a esta disciplina. Lo que buscamos en nuestra propuesta es poder darle al alumnado una perspectiva mucho más completa de lo habitual, a través de una formación que, en clara armonía con la filosofía del STEM, esté caracterizada por su interdisciplinariedad.¹¹ Esto permite abrir el bachillerato a todo tipo de alumnado, dándole a los estudiantes de ciencias la oportunidad de comprender con profundidad los conceptos, las técnicas y los métodos sobre las materias científicas que estudian en el instituto; y proporcionando a los estudiantes de humanidades la oportunidad de acercarse a una parte de la historia —la científica—, indispensable para conocer nuestra evolución y nuestro sitio en el mundo. Para poder llevar a cabo este proyecto de marcado carácter interdisciplinar con garantías, unimos fuerzas varios departamentos (matemáticas, física, historia, biología), tanto en la impartición de la citada asignatura, como en la tutorización de los proyectos, si bien, conscientes de la imposibilidad de abarcar la historia y la filosofía de la ciencia en una sola asignatura, implantamos un ciclo de charlas permanente —*Ciclo StemBach de Charlas en Historia y Filosofía de la Ciencia*—, con la idea de que expertos en la materia puedan compartir con profesores y estudiantes su visión, experiencia y conocimiento acerca de cuestiones relevantes en el ámbito de esta disciplina.¹²

8. La normativa establece un mínimo de 2 horas y un máximo de 3 (ver el artículo quinto, apartado a) (Xunta de Galicia, 2023c).

9. Trabajo Fin de Bachillerato.

10. Se pueden consultar los proyectos ofertados por dichas universidades en las páginas web oficiales (véanse, por ejemplo: Stem UDC, Stem USC). Existe la opción también de crear proyectos *ad hoc*. En el bienio 2022-2024, nuestro centro creó dos de esos proyectos en colaboración con la facultad de matemáticas de la USC —*Temas da Historia da Matemática*, dirigido por Manuel Eulogio Ladra González—, y con la facultad de filosofía de la misma universidad —*¿Qué é un número?*, dirigido por María de la Concepción Martínez Vidal.

11. Ver el artículo quinto, apartado a) (Xunta de Galicia, 2023c).

12. Para quien esté interesado, puede consultar todos los detalles del StemBach en Historia y Filosofía de la Ciencia —programa de la asignatura, equipo docente, TFB finalizados y en curso, programa del *Ciclo de Charlas*, etc.—, en la página web oficial (Dorrego, s. f.).

La opción del StemBach es particularmente interesante para aquellos estudiantes que vayan a cursar estudios universitarios, acercándolos a la práctica de la investigación, y pre- parándolos para una etapa en la que el estudio y la reflexión crítica se tornan herramientas básicas.

Conclusiones

Echar mano de la historia y la filosofía puede resultar enormemente útil en la enseñanza de una ciencia, ya sea para mostrar una parte desconocida de la disciplina a tratar (cuestiones de ontología acerca de las matemáticas, por ejemplo), o ya sea para completar la comprensión de determinadas ideas, métodos o conceptos (por qué surge un determinado concepto, por ejemplo).

En este capítulo, en lugar de plantear opciones para su uso dentro del aula, hemos mostrado algunas posibilidades para la creación de espacios «cómodos» en los que introducir la historia y la filosofía para abordar la enseñanza de la ciencia —concretamente, las matemáticas—. Desde un club de lectura, pasando por un club de ciencias, hasta un bachillerato específico al abrigo del cual institucionalizar la historia y la filosofía de la ciencia con la creación de una asignatura propia, y con la oportunidad de introducir a sus estudiantes en la investigación de la ciencia a través de las humanidades.

Referencias bibliográficas

- DORREGO, Eduardo (coord.) (s. f.). *StemBach. Historia y filosofía de la Ciencia*. IES Alfonso X O Sabio <<https://sites.google.com/iesafonsoxcambre.com/stemiesafonsoxcambre/inicio>>.
- EUCLIDES (1991). *Elementos. Libros I-IV*. Introducción de Luis Vega, traducción y notas de María Luisa Puertas Castaños. Madrid: Gredos.
- FLEXNER, Abraham (2017). *The Usefulness of Useless Knowledge*. Princeton: Princeton University Press.
- SÁNCHEZ RON, José Manuel (2017). *G. H. Hardy. Apología de un matemático*. Madrid: Capitán Swing.
- SCHUBRING, Gert (2005). *Conflicts Between Generalization, Rigor, and Intuition Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17th-19th Century France and Germany*. New York: Springer.
- Stembach UDC. Universidade da Coruña <<https://www.udc.es/es/stembach/>>.
- Stembach USC. Universidade de Santiago de Compostela <<https://www.usc.gal/gl/stembach>>
- WARDHAUGH, Benjamin (2022). *Las infinitas vidas de Euclides: Historia del libro que forjó nuestro mundo*. Barcelona: Shackleton Books.
- Xunta de Galicia (2023a). *Resolución do 2 do outubro de 2023 da Dirección Xeral de Ordenación e Innovación Educativa, dentro das actuacións para o fomento da lectura no ámbito educativo, no contexto do Plan LÍA de Bibliotecas Escolares (Lectura, Información e Aprendizaxe* [en línea]. <https://www.edu.xunta.gal/portal/sites/web/files/2324_convocatoria_clubs_de_lectura_asinada.pdf>
- Xunta de Galicia (2023b). *Resolución do 28 de xuño de 2023, da Dirección Xeral de Ordenación e Innovación Educativa* [en línea]. <https://www.edu.xunta.gal/portal/sites/web/files/resolucion_club_de_ciencia_23_24-asinada.pdf>
- Xunta de Galicia (2023c). *Resolución do 2 de xuño de 2023, da Dirección Xeral de Ordenación e Innovación Educativa, pola que se regula o bacharelato de excelencia en Ciencias e Tecnoloxía (STEMbach), para o curso 2023/24* [en línea]. <https://www.edu.xunta.gal/portal/sites/web/files/resolucion_stembach_23_24_asinada.pdf>

LAMARCK: PERQUÈ PARLAR-NE A L'ENSENYAMENT SECUNDARI, I COM FER-HO

AGUSTÍ CAMÓS

SOCIETAT CATALANA D'HISTÒRIA DE LA CIÈNCIA I DE LA TÈCNICA

Resum: S'analitza com s'ha valorat Lamarck i la seva obra des de la seva publicació fa més de dos segles, i les principals confusions al voltant de les seves teories científiques. Per introduir la figura i l'obra de Lamarck a l'aula d'ensenyament secundari s'han reproduït diverses propostes que varen fer Ricardo Noguera et al., en un article publicat a la revista Science & Education l'any 2021, i se n'afegeix una altra que es centra en buscar i analitzar diferents informacions errònies sobre Lamarck, així com els factors que han pogut influir en la seva propagació.

Paraules clau: Lamarck, Darwin, evolució, girafa, herència dels caràcters adquirits.

Lamarck: why talk about it in secondary education, and how to do it

Summary: Here I analyse how Lamarck and his work have been interpreted since its publication, more than two centuries ago, and the main confusions surrounding his scientific theories. To introduce Lamarck's work in the classroom, two different approaches have been used: the first one was based on a paper published by Noguera et al. in the journal Science & Education (2021), while the second was focused on the sources of the «fake news» about Lamarck and the factors that have influenced the transmission of these misunderstandings.

Keywords: Lamarck, Darwin, evolution, giraffe, inheritance of acquired characteristics.

El tractament de Lamarck al llarg del temps

En la història oficial alguns destacats personatges en diferents moments són elogiats, en d'altres, ignorats, i en d'altres, menystinguts en funció de diverses circumstàncies. Lamarck en seria un cas: en vida va ser elogiat per la seva tasca com a botànic i com a zoòleg, però menystingut per la ciència oficial en altres àrees, particularment per la formulació de la seva teoria de l'evolució. En aquest sentit, és fortament il·lustratiu l'infame *Éloge* que escrigué un dels personatges contemporanis més influents de la ciència francesa, George Cuvier, que els seus col·legues li varen impedir llegir a l'Acadèmia pel seu desdeny vers al finat. Sí que fou publicada la traducció anglesa de l'*Éloge* en *The Edinburgh new philosophical journal*, i el menyspreu a Lamarck va anar difonent-se més enllà de França. No obstant, en entorns de naturalistes allunyats de la ciència oficial tant a França com a altres països com Anglaterra, les idees de Lamarck tingueren una notable acceptació.

En el darrer terç del segle XIX, i a remolc de la propagació de les idees evolucionistes gràcies a l'obra de Darwin, Lamarck fou cada cop més valorat, fins al punt que a principi del segle XX l'evolucionisme lamarckià arribà a tenir més seguidors que el darwinià. Tot canvià després del dur enfrontament entre els neolamarckistes i els neodarwinistes que es produí en els primers decennis del segle XX, i que culminà amb la victòria dels darrers amb la formulació de la teoria sintètica de laevolució. Com a conseqüència, Darwin esdevingué el més gran naturalista, mentre Lamarck tornava a ser durament atacat i menyspreat.

Els que ens vàrem formar en els darrers anys del franquisme, quan en algunes universitats espanyoles ja s'explicava la teoria sintètica de l'evolució, vàrem veure com els professors es referien sovint a Darwin d'una forma molt elogiosa, mentre que ho feien ben poc de Lamarck, i quan ho feien era per menystenir-lo. Els llibres de text de biologia de finals dels anys setanta i principi dels vuitanta reflectien la mateixa situació, sovint no el citaven en parlar d'evolució, però si ho feien, explicaven malament el seu model evolutiu i es referien a Lamarck com un científic poc rigorós o un especulador.

Però en els darrers decennis del segle va començar a canviar la situació. Un punt d'inflexió destacat va ser l'aparició d'un article d'Ernst Mayr, un dels creadors de la teoria sintètica de l'evolució, on proposava una revisió de l'obra de Lamarck (Mayr, 1972). En els anys següents, diversos historiadors de la ciència varen fer una profunda revisió de l'obra de Lamarck per comprendre-la en el seu context històric i analitzar la seva influència en diversos països. Entre aquests historiadors destacarem Richard Burkhardt (1977), Goulven Laurent (1987), Pietro Corsi (1988) i Adrian Desmond (1989).

En els darrers anys també han contribuït a la recuperació de la figura de Lamarck els notables avenços en el camp de l'epigenètica, que s'acostuma a relacionar amb l'herència dels caràcters adquirits. Aquesta faceta de la recuperació es basa en una important confusió, que el mecanisme d'herència dels caràcters adquirits era el que separava fonamentalment el model evolutiu lamarckià del darwinià. Com veurem, aquest es un notable error: tots dos, Darwin i Lamarck, defensaven aquest mecanisme, tot i que Lamarck li donava un paper més destacat.

A poc a poc aquesta revisió historiogràfica va anar arribant als llibres de text i als medis de divulgació científica. Lamarck va tornar a aparèixer i es va començar a explicar millor la seva teoria de l'evolució i la seva influència (Camós, 2021: 53-65). Així i tot, ja entrat en el segle XX encara podíem llegir en alguns llibres de text que Lamarck «[...] va intentar oferir una explicació racional de la transformació de les espècies» (Rubio, Pulido i Roiz, 2008: 46), potser no era racional el que va

escriure?, o que «Malgrat no contenir, en cert sentit, una autèntica teoria evolutiva» (Casamiquela, 2008: 79), què era, doncs, la teoria de Lamarck?

Més recentment encara podem trobar un cert menyspreu a Lamarck en algunes obres. Per exemple, en un llibre escrit conjuntament per Juan José Millás i el paleontòleg i divulgador científic Juan Luis Arsuaga, aquest darrer es dirigeix a Millás per dir-li que el lamarckisme «es una herejía de la que espero curarte» (Millás i Arsuaga, 2020: 48). Encara s'associa el lamarckisme amb l'heretgia i es pensa que cal convertir els seus seguidors.

Les principals confusions que s'han tramès entorn de la figura de Lamarck

Un primer element que cal considerar és el poc respecte pel que fa a les seves aportacions a la ciència, quan Lamarck basà les seves teories en un gran coneixement de la natura que abastà tant animals com vegetals, fòssils i geologia. Lamarck fou un gran botànic que, a més de descriure nombroses espècies, va introduir les claus dicotòmiques com a eina de classificació que ben aviat usaren tots els naturalistes. En el camp de la zoologia, a més de descriure nombroses espècies, va fer una renovació notable de la sistemàtica. Menys coneguda és la seva gran aportació a la paleontologia dels invertebrats, va descriure prop d'un miler d'espècies i va buscar els seus anàlegs vius per introduir-los en les classificacions.

Però la seva aportació més revolucionària fou la formulació d'una teoria materialista de l'evolució de les espècies, basada en els següents punts: l'aparició dels organismes més simples per generació espontània, els seu augment de complexitat a causa de l'existència d'una força natural que tendia a fer més complexes els éssers vius, i la seva adequació al medi a través de l'herència dels caràcters adquirits que reforçava o debilitava els òrgans segons el seu ús o desús.

Lamarck aportà dades provinents dels seus grans coneixements de la natura per recolzar la seva teoria. En la primera part de la seva obra més coneguda, la *Philosophie zoologique*, es referí reiteradament a dades provinents dels seus profunds coneixements de sistemàtica zoològica, però també a altres, com les que provenien de la hibridació, les que provenien de les modificacions sofertes pels animals i plantes domesticats com les diferents races de gossos, i moltes que provenien d'estudis anatòmics, com les dents dels fetus de la balena, la manca de dents de l'os formiguer, el ulls atrofiats del talp, la ubicació dels ulls dels peixos plans... o el potinejat cas del coll de la girafa, al qual ens referirem més endavant.

La seva teoria s'ha tramès amb molts errors. Un primer ha estat apropar-s'hi considerant Lamarck com a precursor de Darwin, i, per tant, interpretant la seva teoria en funció de qui viuria mig segle després, en lloc d'interpretar-la en el seu context històric. Un altra confusió es produí especialment a finals del segle XIX, quan alguns autors amb profundes creences religioses van considerar que la força de la complexitat que postulava Lamarck no era una força material, sinó la mà de Deu, i van convertir el seu model evolutiu en teleològic quan ell era un convençut materialista. Un altra notable confusió que ha tingut una gran difusió fou afirmar que era la voluntat el que creava els òrgans, però com ja afirmà contundentment Mayr (1972: 58): «Lamarck never said anything of the sort»; es tracta d'una errònia interpretació que segons diversos autors prové d'una mala traducció a l'anglès de les paraules de Lamarck, que aparegué als *Principles of Geology* de Lyell. Un altre error fou considerar que les trajectòries que seguien els organismes en la seva evolució al llarg del temps eren rectilínies, quan ja en les addicions que va fer al final de la *Philosophie zoologique* perfila un model ramificat que fins i tot il·lustrà (Lamarck, 2007: 434 [1809: II, 463]), i que desenvoluparia en obres posteriors.

En l'anacrònica insistència de comparar els models evolutius de Darwin i Lamarck s'ha caigut en dos notables confusions. La primera és considerar que Lamarck defensava la generació espontània, mentre que Darwin no ho feia. En realitat, el gran naturalista anglès no es pronuncià en públic sobre aquest tema, però sabem per la seva correspondència que defensava aquest mecanisme per originar els primers organismes que aparegueren a la Terra (Peretó, Bada i Lazcano, 2009).

Però l'error més arrelat és considerar que l'herència dels caràcters adquirits és el més important per diferenciar les idees de Lamarck de les de Darwin, i, de fet, el gran debat que es produí en el primer terç del segle XIX entre neolamarckistes i neodarwinistes es centrà en l'acceptació o no d'aquest mecanisme. A més, s'acostuma a il·lustrar amb el repetit exemple de l'allargament del coll de la girafa que habitualment acompanya les explicacions sobre el lamarckisme. En canvi, les explicacions sobre el darwinisme s'acostumen a il·lustrar amb l'elegant exemple dels pinsans de les Galápagos. Fins i tot en els exemples es tendeix a ridiculitzar Lamarck mentre s'enalteix a Darwin.

Darwin també defensava l'herència dels caràcters adquirits com un mecanisme destacat per l'evolució dels organismes, tot i que el més important era la selecció natural. En l'*Origin of Species* ho exposà precisament en el cas de l'allargament del coll de la girafa, en discutir unes objeccions que li havia plantejat George Mirvart, un naturalista catòlic britànic. Veiem el que afirmava Darwin en la sisena i definitiva edició:

By this process long-continued, which exactly corresponds with what I have called unconscious selection by man, combined no doubt in a most important manner with the inherited effects of the increased use of parts, it seems to me almost certain that an ordinary hoofed quadruped might be converted into a giraffe (Darwin, 1872: 178).

Darwin es referí en altres ocasions al destacat paper de l'herència dels caràcters adquirits en el seu model d'evolució. Per tant, és indefensable assenyalar que la diferència principal entre el model de Lamarck i el de Darwin rau en l'acceptació o no d'aquest tipus d'herència un cop s'han llegit les seves obres, encara que aquesta idea estigui profundament arrelada i difosa per multitud de mitjans i continuï repetint-se.

Propostes per a abordar la figura de Lamarck en l'ensenyament secundari

Vist que hem de considerar Lamarck com un gran científic, i segurs que la història de la ciència és un bon instrument per a facilitar l'aprenentatge global dels alumnes, veiem ara en quins contextos podríem introduir-lo en la secundària. Exposaré en primer lloc algunes de les propostes que han fet tres destacats historiadors i historiadora de la ciència, Ricardo Noguera-Solano, Juan Manuel Rodríguez-Caso i Rosaura Ruiz-Gutiérrez, en un article publicat el 2021 en la revista *Science & Education*.

Aquests tres historiadors, que són un bons coneixedors del debat històric entorn de l'evolució de les espècies i de l'obra de Lamarck, consideren que els professors podrien referir-se a Lamarck en tractar quatre aspectes relacionats amb el desenvolupament del pensament evolutiu:

1. L'espècie com a concepte arbitrari, però útil per a l'estudi de la natura. Es tracta d'un tema científic d'actualitat que podem trobar, per exemple, en un article de Carl Zimmer aparegut al diari *Ara* del 24 de febrer de 2024, on es refereix a que «el debat sobre què és una espècie no s'acaba». Lamarck afirmà a les primeres pàgines de la *Filosofia Zoològica*:

La natura no ha format realment ni classes, ni ordres, ni famílies, ni gèneres, ni espècies constants, sinó solament individus que se succeeixen els uns als altres, i que s'assemblen als que els han produït. Ara bé, aquests individus pertanyen a races infinitament diversificades, que es matisen en totes les formes i en tots els graus d'organització, i que cadascuna es conserva sense mutació, en tant que cap causa de canvi actua sobre aquestes (Lamarck, 2007: 26 [1809: I, 21]).

2. La relació avantpassat-descendent i la diversificació orgànica. Aquesta diversificació s'aniria produint per l'acumulació de petits canvis que passarien d'una generació a la següent i conduiria amb el temps a una sèrie de trajectòries evolutives ramificades. Així ho explicita a la *Filosofia Zoològica*:

No vull dir per això que els animals que existeixen formen una sèrie molt simple, i per tot arreu igualment matisada; sinó que dic que formen una sèrie ramificada, irregularment graduada, i que no hi ha cap discontinuïtat en les seves parts, o que, almenys, no n'hi ha hagut sempre (Lamarck, 2007: 43 [1809: I, 59]).

3. El canvi gradual, relacionat amb els canvis en les condicions ambientals. També ho explicita Lamarck:

La natura, produint successivament totes les espècies d'animals, i començant per les més imperfectes o les més simples, per acabar la seva obra per les més perfectes, ha complicat gradualment la seva organització; i aquests animals en escampar-se generalment per totes les regions habitades del globus, cada espècie ha rebut la influència de les circumstàncies en les quals s'ha trobat, els hàbits que nosaltres li coneixem i les modificacions en les seves parts que l'observació ens mostra (Lamarck, 2007: 134 [1809: I, 266]).

Perquè això es pogués produir, Lamarck també defensà un temps enorme:

En comparació a les durades que veiem com grosses en els nostres càlculs ordinaris, ha calgut, sens dubte, un temps enorme i una variació considerable en les circumstàncies que se succeeixen, perquè la natura hagi pogut conduir l'organització dels animals al grau de complicació i desenvolupament com la veiem en aquells que són més perfectes (Lamarck, 2007: 55-56 [1809: I, 89]).

Afegiria al final de la *Filosofia Zoològica* una preciosa i pedagògica analogia per explicar l'enorme durada dels temps geològics, fent ús de les manetes del rellotge (Lamarck, 2007: 435 [1809: II, 465]).

4. Les controvèrsies sobre l'origen de la vida, la transformació dels organismes i l'origen natural dels éssers humans, incloses les capacitats intel·lectuals i morals. Lamarck defensà que la natura ha format tots els éssers vius començant pels més simples. Per tant, refusava un origen diví de la vida. Però, a més, defensava que l'home i totes les seves capacitats també són producte de la natura. A les darreres pàgines del capítol vuitè de la *Filosofia Zoològica*, partint del seu model evolutiu, desenvolupa una primera exposició de com es podria haver produït la progressiva evolució des dels grans simis fins a l'home (Lamarck, 2007: 195-198 [1809: I, 349-357]).

En la tercera part de l'obra Lamarck desenvolupa unes sorprenents explicacions materialistes sobre el funcionament de les capacitats mentals de l'home, que, per tant, també serien fruit dels processos d'evolució. Tal com afirma el neurofisiòleg Xurxo Mariño (2021):

Les seues reflexions sobre el funcionament del sistema nerviós, que han passat desapercbedes, són en molts casos sorprenentment avançades. Per a Lamarck la ment és una conseqüència de l'organització física de l'encèfal i de la seua activitat, en concret de l'escorça cerebral, per la qual cosa rebutja una ànima immortal.

Afegeixo un altra proposta per a treballar amb els alumnes, molt arrelada en el món en què vivim, que consistiria a investigar la forma en què es manipula la informació. Es faria estudiant com s'ha anat explicant el model evolucionista de Lamarck i les seves diferències amb el de Darwin, centrant-ho en l'explicació de l'allargament del coll de la girafa.

S'hauria de començar pel que deia Lamarck a la *Philosophie Zoològique* (1809, I: 256-257), el que exposà Lyell a *Principles of Geology* (1835, II: 415) i Darwin a l'*Origin* (1872: 177-178). Seria interessant treballar-ho a partir dels texts originals dels autors, situant-los en el seu context històric, i amb l'ajut dels professors d'idiomes i d'història. Després passariem per texts contemporanis; un podria ser *El Reloj de Mr. Darwin* d'Arsuaga, que a les pàgines 171-173 reproduïx un text de Darwin a l'*Origin* sobre l'evolució de la girafa, però oblidant el paràgraf següent on parla de l'herència dels caràcters adquirits i que hem reproduït més amunt (Arsuaga, 2009: 171-173). També es farà una cerca oberta a la xarxa on es vegi com s'usa actualment l'exemple de la girafa per explicar l'evolució.

Finalment, podria fer-se un debat sobre el com i el perquè s'ha anat produint aquesta manipulació de la informació, quins podrien ser els diferents interessos que n'hi hauria darrere i les enormes dificultats que hi ha per combatre la difusió de les falses informacions i explicacions.

Referències bibliogràfiques

- ARSUAGA, Juan Luis (2009). *El Reloj de Mr. Darwin*. Madrid: Temas de hoy.
- BURKHARDT, Richard (1977). *The Spirit of System. Lamarck and Evolutionary Biology*. Cambridge: Harvard University Press.
- CAMÓS, Agustí (2021). *La huella de Lamarck en España en el siglo XIX*. Madrid: CSIC.
- CASAMIQUELA, Maria Angels (2008). *Biologia i Geologia 4rt d'ESO*. Barcelona: Santillana.
- CORSI, Pietro (1988). *The age of Lamarck: Evolutionary Theories in France 1790-1830*. Berkeley: University of California Press.
- DARWIN, Charles (1872). *The origin of species*. 6a ed. London: Murray
- DESMOND, Adrian (1989). *The politics of evolution: Morphology, Medicine, and Reform in Radical London*. Chicago y Londres: The University of Chicago Press.
- LAMARCK (1809). *Philosophie zoològiques*. París: Dentú.
- LAMARCK (2007). *Filosofia Zoològica*. Traducció d'Agustí Camós. Barcelona: IEC - Pòrtic, Eumo.
- LAURENT, Goulven (1987). *Paléontologie et évolution en France de 1800-1860: Une Histoire des idées de Cuvier et Lamarck à Darwin*. París: CTHS.
- LYELL, Charles (1831). *Principles of Geology*, vol. II. London: John Murray.
- MARIÑO, Xurxo (2021). «Una fotografia de Lamarck». *Mètode*, 109, p. 93.
- MAYR, Ernst (1972). «Lamarck revisited». *Journal History of Biology*, 5, p. 55-94.
- MILLÁS, Juan José; ARSUAGA, Juan Luis (2020). *La vida contada por un sapiens a un neandertal*. Barcelona: Alfaguara.
- NOGUERA-SOLANO, Ricardo; RODRÍGUEZ-CASO, Juan Manuel; RUIZ-GUTIÉRREZ, Rosaura (2021). «The Evolutionary Thought of Jean-Baptiste Lamarck. Why His Original Ideas Should Be Taught in Classrooms». *Science & Education*, 30, p. 909-929.
- PERETÓ, Juli; BADA, Jeffrey Lee; LAZCANO, Antonio (2009). «Charles Darwin and the origin of life». *Origins of Life Evolution and the Biosphere*, 39, p. 395-406.
- RUBIO, Nicolás; PULIDO, Carlos; ROIZ, Juan Manuel (2008). *Ciències pel món contemporani, 1r. Batxillerat*. Barcelona: Barcanova.

ROSA SENSAT I LES CIÈNCIES EN LA VIDA DE LA LLAR

NÚRIA SOLSONA PAIRÓ

GRUP LIEC (LLENGUA I ENSENYAMENT DE LES CIÈNCIES)
UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA

Resum: Amb motiu de l'Any Rosa Sensat, l'article proposa analitzar el llibre Les ciències en la vida de la Llar, publicat per l'autora el 1923, per a la formació de les dones que assistien als cursos d'economia domèstica de l'Ajuntament de Barcelona. L'objectiu era donar base científica a les activitats domèstiques. El llibre s'inscriu en el corrent de l'École Menagère de França i de Home Economic als Estats Units. Per això, Rosa Sensat selecciona un conjunt de fenòmens quotidians als quals dona una explicació científica senzilla. El seus textos es poden utilitzar a les aules de secundària com a model de referència.

Paraules clau: química, Rosa Sensat i Vilà, ciència domèstica, segle XX.

Rosa Sensat and her book *Les ciències en la vida de la llar*

Summary: On the occasion of the Year of Rosa Sensat, the article proposes analyzing the book Les ciències en la vida de la llar, published by the author in 1923, for the training of women who attended the Barcelona City Council's Home Economics courses. The objective was to provide a scientific basis for domestic activities. The book is in line with the current of the École Ménagère of France and of Home Economics in the United States. For this reason, Rosa Sensat selects a set of everyday occurrences for which she gives a simple scientific explanation. Her texts can be used in secondary school classrooms as a reference model.

Keywords: chemistry, Rosa Sensat i Vilà, domestic sciences, 20th century.

Introducció: context històric

Amb motiu del 150 aniversari del naixement de Rosa Sensat, proposem la revisió amb mirada didàctica del llibre *Les ciències en la vida de la llar*, publicat el 1923 per l'Editorial Pedagògica.

Els principis de la domesticitat s'estaven ensenyant ja a mitjans del segle XIX, però el terme «economia domèstica» no es va aplicar fins a principis del segle XX. Es refereix al conjunt d'activitats que requereixen un nivell d'habilitat a la llar, que van des de la preparació i seguretat dels aliments a la cura de les criatures, la cura de la roba, entre altres. També és coneguda com a «ciència domèstica» o «ciències de la llar».

Des de finals del segle XIX, els canvis de les estructures socioeconòmiques provoquen canvis en els models de gènere. L'Institut de Cultura i Biblioteca Popular de la Dona fundat el 1909 per Francesca Bonnemaison (1872-1949), del qual fou en 1914 Rosa Sensat directora pedagògica, tenia 2000 alumnes el 1922. A Catalunya, l'any 1930, el 47 % de les dones no sabia llegir ni escriure, mentre que dels homes n'era un 36 %.

Rosa Sensat (Masnou, 1873-1961) va néixer en una família treballadora, i es guanyava la vida fent puntes al coixí. Als 12 anys va poder entrar a estudiar a l'Escola Normal. Sensat es dedicà a l'ensenyament de les ciències a Alacant, després de guanyar, pels volts del 1900, unes oposicions de mestra. Més tard, va organitzar cursos de formació adreçats a les mares i mestresses de casa en el marc de la Biblioteca Francesca Bonnemaison, a Barcelona. A l'Arxiu Històric de Rosa Sensat es troben documents sobre els seus interessos en les ciències des de 1911. L'autora va ser becada per la *Junta de Ampliación de Estudios* a Bèlgica, a Suïssa (a Ginebra) i també a Alemanya. L'estratègia de visitar Europa va ser utilitzada per altres dones com la periodista Carmen de Burgos (1867-1932), que el 1916 va visitar Suïssa, Dinamarca, Suècia i Noruega.

Rosa Sensat va conèixer l'*Enseignement Ménager*, adreçat a les mestresses de casa. Fruit dels seus aprenentatges va escriure el *Curs normal d'ensenyament domèstic per a mestresses* (1921), el *Rapport de la directrice et professeur du cours* Rosa Sensat présenté au IIIème Congrès d'Enseignement Ménager (1922) i *Cómo se enseña la economía doméstica* (1927).

Genealogia científica femenina

Seguim les línies de treball del projecte Women's Legacy que proposa inserir les dones en els blocs concrets del currículum de secundària. I emmarcar-les en els contextos de creació femenina que s'han produït al llarg de la història.

Les antecessores de Rosa Sensat i Vilà són les alquimistes anteriors al segle XVII, Marie Fouquet (1590-1681); Marie Meurdrac (1610-1680), que va escriure *La Chymie charitable et facile en faveur des dames* (1666), i Jane Marcet (1769-1858) amb les seves *Converses de química* (1805). També van ser antecessores les autores de les ciències de la llar del segle XIX, Catherine Beecher (1800-1878), Emily Huntington (1841-1909), Mary Beaumont Waleh (1841-1923), Ellen Swallow Richards (1842- 1911) i Laura Starr Ware Wilkinson (1843-1921). I, a França, Marie Amélie Joséphine Doublé (1836-1878) i totes les mestres anònimes de l'*Enseignement Menager*.

Les contemporànies de Rosa Sensat i Vilà (1873-1961) foren Mme E. Compain, que va publicar *La Science de la Maison* (1944), la biòloga Margalida Comas Camps (1892-1972), Carmen Brugger Romaní (1899-?) i Trinidad Salinas Ferrer (?-1965). Les hereves de Rosa Sensat són Àngels Ferrer Sensat (1904-1992) i les mestres Montse Ortigosa, Eva Chacón i Mercè Jarque, que han continuat la seva obra.

Anàlisi del contingut del llibre

El llibre *Les ciències en la vida de la llar* (1923) és un compendi de 30 capítols o lliçons de ciències, que es basa en l'experiència del «Curs d'Ensenyament domèstic per a mestresses» organitzat per la Comissió de Cultura de l'Ajuntament de Barcelona. En els primers capítols exposa les bases de física i química d'acord amb el que indica en el pròleg.

La dona ha de saber Física i Química. Són coneixements de cultura general que, ultra desenrotllar el seu esperit d'observació, li proporcionen una munió d'idees que no ha d'ignorar tot aquell, que aspiro a una mitjana cultura i que són d'aplicació pràctica en les ocupacions que li atenyen (Sensat, 1923: 8).

En anteriors ocasions (Solsona, 1999), he analitzat l'estructura i els objectius del llibre, ara em centraré en els continguts científics i la seva contextualització en la cuina o la llar. Quant a la metodologia, l'autora es reclama exempta de dogmatisme i sistematització. No vol seguir l'ordre general adoptat per l'ensenyament de les ciències, tot dient:

He determinat una rigorosa limitació en la tria de les qüestions que es refereixen més a l'economia domèstica, tractant-les en capítols separats i sempre amb l'intent de relligar en un sol moment conscient de l'esperit, la llei i el fet, l'activitat i el raonament (Sensat, 1923: 9).

En el «Capítol I. Coneixement del material necessari per a senzilles manipulacions de Física i Química. Indicacions pràctiques pel seu ús», diu:

Per realitzar amb profit l'estudi de les ciències de la naturalesa és imprescindible l'experimentació personal. Per això volem proporcionar d'antuvi, el coneixement del material que cal per a aquesta experimentació, donant a l'ensens les instruccions generals que són necessàries per a manejar-lo i repetir els experiments que anirem indicant durant el curs d'aquesta obra (Sensat, 1923: 11).

Esmenta els matrassos Jena, les retortes senzilles i tubulades, els tubs d'assaig, la vareta buida i la massís, els bucls... tot citant fins a quaranta-sis instruments.

Per muntar els aparells cal saber preparar els taps de suro i els tubs de vidre. Els taps de suro hem d'escollir-los de textura fina i compacta, és a dir, sense grans porus per tal que ajustin perfectament i no deixin passar els gasos. Podem corregir la permeabilitat d'alguns taps submergint-los abans dins d'aigua bullint i després dins un bany de parafina, acabat el qual queda impermeable del tot (Sensat, 1923: 13).

Alguns exemples de les manipulacions que proposa són fer un cremador d'alcohol amb un tinter o fer un voltímetre a partir d'un plat de terra. L'autora proposa un muntatge per fer oxigen dient:

El tub de sortida va a parar a un recipient (que pot ser un gibrell, un rentamans, una cuveta qualsevol) que s'anomena cuveta-hidroneumàtica.¹ Està plena d'aigua fins a cobrir del tub... Els tubs de vidre hem de triar-los de parets fines, en el cas que solament disposem, per a llur curvatura, de focus calorífics de poca potència, com una llàntia d'alcohol. S'han de preferir els de diàmetre ben igualat (Sensat, 1923: 53).

En el «Capítol III. Elements Simples i Combinacions químiques. Generalitats», comença parlant dels fenòmens físics i químics dient:

Fins ara hem estudiat alguns canvis de la matèria – els canvis d'estat- i hem pogut comprovar que, després de tot, llur naturalesa segueix essent la mateixa. La mantega, després de la seva fusió, segueix essent mantega. L'aigua en el seu estat de vapor i en el seu estat sòlid, segueix essent aigua, sense modificar la seva substància. ... Ara ens fixarem en una altra mena de canvis ... Agafem un tros de pa i el posem al forn: es torna dur i canvia de color. Primer es torna groc, després negre. La seva textura varia, la seva sabor ha canviat. Pesant-lo veurem que ha perdut pes. La seva composició s'ha modificat del tot... (Sensat, 1923: 27).

En el «Capítol IV. Pes i Densitat dels cossos», indica:

En els diferents quefers domèstics ja ha passat el temps de les indeterminacions i de les vaguetats. Les antigues receptes de cuina deien: “s'agafa un grapat de tal o qual cosa”, “s'hi tira deu cèntims de tal altra cosa”, dins d'un menjar, sense pensar que no totes les mans són iguals per a prendre la mateixa quantitat dins un grapat, ni el preu corrent de les coses és sempre el mateix, perquè 10 cèntims d'una substància representin una mateixa quantitat en diferents ocasions. També en les operacions de cuina com en les combinacions químiques, que ja hem vist, les matèries han d'entrar-hi en una proporció determinada, perquè la impressió que produeixin en el nostre sentit del gust sigui constantment agradable (Sensat, 1923: 33).

Pel que fa a la intenció didàctica del llibre, assenyala:

Vulgarment acostumem a dir que el plom pesa més que l'alumini, el marbre pesa més que la fusta, i, no obstant una senzilla operació de pesar serà suficient per a convèncer-nos que les nostres afirmacions son inexactes (Sensat, 1923: 40).

En el Capítol V, sobre l'aire, diu:

la pressió atmosfèrica sobre un home és d'uns 15.000 Qg. L'havíem qualificat d'extraordinària amb molta raó; no obstant, no ha d'espantar-nos ja que coneixem les causes que ens la fan insensible (Sensat, 1923: 53).

1. Es respecta l'ortografia de Rosa Sensat.

Pel que fa al baròmetre explica:

Torricelli feu el mateix experiment de Pascal, però utilitzant el mercuri. Tenint en compte que la densitat d'aquest líquid és major que la de l'aigua, prengué un tub més petit d'un metre d'alçada solament. La columna assolí en aquest 76 cm. d'alçada. Es calculà el seu pes 1 cm³ de base x 76 cm. d'alçada donen 76 cm³ de volum que, multiplicats per la densitat del mercuri (13,6) donen un resultat de 1033 gr. exactament igual a l'obtingut per la columna d'aigua... (Sensat, 1923: 53).

En el Capítol VI estudia l'oxigen i el nitrogen i fa un muntatge per obtenir l'oxigen amb ampolles amb obturador invertides damunt d'un recipient amb aigua. Rosa Sensat és partidària de l'observació curiosa dels procediments científics, com podem veure en l'obtenció de l'oxigen, quan recomana:

...mesclar clorat de potassi amb biòxid de manganès... S'ha de demanar aquesta substància ben seca y ben calcinada perquè no tingui matèries estranyes inflamables. El clorat de potassa i el biòxid de manganès, un cop mesclats en parts iguals, es tiraran al matràs... (Sensat, 1923: 60).

En el Capítol VII, parla de l'anhidrid carbònic, el carboni i l'òxid de carboni dient:

L'anhidrid carbònic és un altre gas de l'aire. Recordem que en cremar un tros de carbó dins l'oxigen es despreguà un gas al qual vam donar aquest nom (Sensat, 1923: 65).

En el «Capítol VIII. Vapor d'aigua. Estudi de l'hidrogen», diu:

Continuem ocupant-nos dels gasos de l'aire. Ultra l'oxigen, l'azot i l'anhidrid carbònic, l'aire conté en proporció variable, però sempre petita, una quantitat de vapor d'aigua. A aquesta capacitat d'absorció que té l'aire pel vapor, l'economia del globus li deu grans beneficis com l'evaporació de l'aigua que produeix la pluja (Sensat, 1923: 73).

Parla de la capacitat de l'aire per absorbir el vapor, de l'aire més sec o menys humit i de l'higròmetre de Saussure. En el «Capítol IX Àcids. Bases. Sals», no utilitza el concepte « propietat » i indica:

Abans de passar endavant potser serà convenient fixar la funció química d'una gran quantitat de cossos que usem correntment i els caràcters comuns dels quals cal estudiar (Sensat, 1923: 79).

Parla de l'àcid clorhídric (salfumant del comerç), de l'àcid sulfúric (oli de vidriol), de l'aigua de Seltz, dins la qual hi ha gas carbònic, la sosa càustica, l'amoníac i l'aigua de calç, entre d'altres. Rosa Sensat dona importància a les mesures de seguretat, quan assenyala:

Tal com veiem, la química te els seus perills; però hi ha maneres d'evitar-los i de fer-los desaparèixer totalment. Amb compte i serenitat, i tenint present tots els advertiments (que no oblidarem de fer en cada cas) es pot operar sense temença (Sensat, 1923: 60).

Introdueix la mirada quantitativa quan parla de la composició de l'aire i diu:

Mitjançant mètodes de d'una gran precisió s'ha determinat la proporció d'oxigen i nitrogen que conté l'aire en cent parts. Per cada 100 litres d'aire n'hi ha 20'93 d'oxigen i 70'7 de nitrogen. Les petites quantitats d'altres gasos que conté fan variar molt poc aquest relació (Sensat, 1923: 62).

D'acord amb la perspectiva higienista, en el Capítol XI parla de la pols de l'aire, que és la causa de malalties terribles. Proposa una llista de desinfectants com el sublimat corrosiu (biclorur de mercuri), l'aigua oxigenada, el clor, el sulfat de coure, la calç, la cresilina, l'àcid bòric, el formol, el timol, etc. I en el Capítol XII parla del principi de la ventilació. Calefacció i il·luminació de les habitacions. També al Capítol XIV parla de l'aigua com a element de purificació, per la neteja corporal i dels vestits, tot parlant de l'estructura de la pell i els banys fred i calent.

A partir del capítol XV parla del coneixement domèstic: El color dels vestits, El tint de la roba, Els decolorants, Neteja de la roba blanca, La manera d'assecar i donar prestància a la roba, dedica 4 capítols a Els aliments, El vestit. Fibres tèxtils, El color dels vestits, Tenyit de la roba, Descoloridors,² De la manera d'eixugar i donar empesa a la roba. El Capítol XXVII el dedica a les begudes i condiments i fa la destil·lació del vi.

Proposta didàctica

A les aules de secundària es poden utilitzar els textos de Rosa Sensat acompanyats de petites manipulacions, per exemple, per estudiar el canvi químic. Una proposta didàctica seria: «Posa a torrar un tros de pa fins que canviï completament de color. Anota els canvis observats i llegeix el text següent de Rosa Sensat del seu llibre *Les ciències en la vida de la llar*, escrit en 1923, en el "Capítol III. Elements simples i Combinacions químiques"». Diu a «Fenòmens físics i fenòmens químics»:

Fins ara hem estudiat alguns canvis de la matèria —els canvis d'estat— i hem pogut comprovar que, després de tot, llur naturalesa segueix essent la mateixa. La mantega, després de la seva fusió, segueix essent mantega. L'aigua en el seu estat de vapor i en el seu estat sòlid, segueix essent aigua, sense modificar la substància...

Ara ens fixarem en una altra mena de canvis... Agafem un tros de pa i el posem al forn: es torna dur i canvia de color. Primer es torna groc i després negre. La seva textura varia, la seva sabor ha canviat. Pesant-lo veurem que ha perdut pes. La seva composició s'ha modificat del tot...

En els diferents quefers domèstics ja ha passat el temps de les indeterminacions i de les vaguetats. Les antigues receptes de cuina deien «s'agafa un grapat de tal o qual cosa», sense pensar que no totes les mans són iguals per a prendre la mateixa quantitat dins un grapat. També en les operacions químiques, les matèries han d'entrar-hi en una proporció determinada, perquè la impressió que produeixin en el nostre sentit del gust sigui constantment agradable (Sensat, 1923: 27).

Un cop llegits els textos de Rosa Sensat, escriu-ne un de similar amb tot el que has après sobre els canvis químics.

2. Es respecta l'ortografia de Rosa Sensat.

En resum, Rosa Sensat, coneguda per ser una figura significativa del canvi de l'escola tradicional espanyola a començaments del segle XX, va realitzar un treball de divulgació científica ingent relacionat amb el que avui anomenem treballs de cura. Proposà incorporar les ciències en la formació de les dones, en un moment on la seva educació tenia moltes mancances. Era coneixedora de la línia de treball americana *Home Economic*, que es va desenvolupar al llarg del segle XIX. La proposta que fa al llibre *Les ciències en la vida de la llar* és més propera als continguts científics de *Home Economic*, que no als continguts més lleugers i casolans de l'*École Menagère*, que ella va conèixer de primera mà a França. El llibre recull la bona orientació dels estudis de ciències físiques i naturals en les escoles que visità, trencant fronteres i esquemes vigents. I els seus textos es poden utilitzar a les aules de secundària com a models de referència.

Avui podem afirmar que la cura és un dels pilars de la civilització i hem de fer sentir als homes la importància de la cura d'altri.

Referències bibliogràfiques

SENSAT, Rosa (1919). *Del vestit i la seva conservació*. Barcelona: Minerva.

— (1923). *Les ciències en la vida de la llar*. Barcelona: Editorial Pedagògica.

— (1927). *Cómo se enseña la economía doméstica*.

Madrid: Publicaciones de la Revista de Pedagogía.

SOLSONA PAIRÒ, Núria (1999). «La educación dirigida a las amas de casa». A: BARRAL, Maria José [et al.] (ed). *Interacciones genero y ciencia*. Barcelona: Icaria, p. 233-258. «Women's legacy: Our cultural heritage for equity» [en línia]. [Consulta: 7 març 2024].

**ACTES DE LA
XXI JORNADA
SOBRE LA HISTÒRIA
DE LA CIÈNCIA
I L'ENSENYAMENT**