

MAGNITUDS I NOMBRES: NATURALS, RACIONALS I REALS

Eugeni Vilalta López

Secció Catalana de Metrologia

En metrologia hi ha una manera de tractar els nombres i les magnituds que, de vegades, provoca sorpreses en científics d'altres disciplines.

Alguns aspectes estan relacionats amb els conceptes de *nombre* i *magnitud*. En l'antiga Grècia, els nombres eren objecte d'estudi de l'aritmètica i eren naturals o racionals; les magnituds eren objecte de la geometria i no necessitaven nombres per al seu tractament, que podia fer-se amb regla i compàs. La tradició relata que el descobriment que la proporció entre la diagonal d'un quadrat i el seu costat no corresponia a un nombre racional va comportar almenys un assassinat a l'escola pitagòrica. La geometria analítica de [Descartes](#) i la definició acurada dels nombres reals, obra de [Dedekind](#), van permetre resoldre aquesta classe de problemes.

La situació que tractem ara va actualitzar-se amb motiu de la nova definició de *mol* el 2019. La magnitud «quantitat de substància» va ser descoberta, al llarg del segle XIX, conjuntament amb la formulació de la hipòtesi atòmica, però és independent d'aquesta i, de fet, [Wilhelm Ostwald](#), el gran propulsor del concepte de *quantitat de substància*, va oposar-se a l'existència real dels àtoms fins que l'evidència va passar a ser incontrovertible.

La *quantitat de substància* és un concepte que s'obté a partir de les lleis de les proporcions fixes i de les proporcions múltiples, que desvelen que hi ha un cert sentit en què 1 g d'hidrogen correspon a 16 g d'oxigen o a 12 g de carboni. I aquesta mateixa correspondència es troba, físicament, en el comportament dels gasos perfectes i altres lleis termodinàmiques, amb els mateixos valors numèrics. Aquestes masses es corresponen perquè totes corresponen a la mateixa quantitat de substància i aquest coneixement es codifica en els pesos atòmics. Aquests pesos atòmics permeten l'establiment de la taula periòdica dels elements (excepte quan els pesos atòmics i el nombre atòmic no segueixen el mateix ordre, on el bon sentit de [Mendelèiev](#) l'ajusta a la periodicitat de les propietats).

Operativament la quantitat de substància d'una mostra s'obté a partir de la seva massa i de les taules de masses atòmiques relatives (pesos atòmics) de la Unió Internacional de Química Pura i Aplicada (IUPAC) i de l'Institut Nacional d'Estàndards i Tecnologia (NIST), tant per a les composicions isotòpiques naturals a la Terra com per a cadascun dels isòtops. Per comoditat, la unitat s'estableix de

manera que el mol d'una substància té una massa en grams igual a la seva massa atòmica en dalton, Da. Tot això és previ a l'evidència directa de l'existència d'àtoms ([Einstein](#), 1905 i [Perrin](#), 1909).

Encara que la quantitat de substància s'obté operativament com una magnitud contínua, des del segle XX, on la concepció atòmica és diàfana i prominent, l'èmfasi es posa en la relació entre la quantitat de substància i el nombre d'entitats elementals, nombre d'Avogadro i, per tant, en el seu caràcter fonamentalment discret.

Quan el mol passa a formar part del sistema internacional d'unitats (SI), el 1971, la definició combina les dues visions, definint-lo operativament a partir de la massa i la massa atòmica relativa, però introduint-hi el concepte d'*entitats elementals*: «el mol és la quantitat de substància d'un sistema que conté tantes unitats elementals com àtoms hi ha en 12 g de carboni 12». Aquesta definició no va causar debat sobre el tema que ens ocupa, perquè no es diu expressament que la quantitat de substància és una magnitud contínua, sinó només per referència a la massa.

Però la definició actual, de 2019, no inclou la definició operativa, sinó que només menciona les entitats elementals: «El mol és la unitat del SI de quantitat de substància. Un mol conté exactament $6,022\ 140\ 76 \times 10^{23}$ entitats elementals. Aquest nombre, anomenat nombre d'Avogadro, és el valor numèric fixat de la constant d'Avogadro, N_A , quan s'expressa en la unitat mol^{-1} . La quantitat de substància, símbol n , d'un sistema és una mesura del nombre d'entitats elementals especificades». Ara ja no hi ha cap referència a magnituds contínues com la massa.

Per aclarir una mica el que els redactors ja tenien clar, a la publicació de l'Oficina Internacional de Pesos i Mesures (BIPM) sobre les unitats es declara «La constant d'Avogadro, N_A , és una constant de proporcionalitat entre la magnitud *quantitat de substància* (amb unitat mol) i la magnitud *nombre d'entitats elementals* (amb unitat u, símbol 1)».

És coherent tenir una magnitud com la quantitat de substància, que s'expressa partint dels nombres reals, però que també és proporcional a una magnitud, el nombre d'entitats elementals, que s'expressa partint de nombres naturals?

Per a veure que sí, cal veure totes dues magnituds operativament. Com ens indica el nombre d'Avogadro, hi ha $6,022\ 140\ 76 \times 10^{23}$ àtoms de carboni en 12 g de carboni 12.

La resolució més petita dels instruments de pesatge és de 0,1 µg, que correspon a $5,018\,450\,63 \times 10^{15}$ àtoms de carboni 12, impossibles de comptar. Fins i tot per a una molècula orgànica de massa 4 MDa, 0,1 µg corresponen a $1,254\,612\,67 \times 10^9$ molècules, que continuen essent impossibles de comptar (la constant d'Avogadro, fins i tot en aquest cas extrem es queda en les desenes d'unitats).

En altres aplicacions sí que podem comptar les unitats, 5 àtoms, 20 electrons, però comptant no arribarem als milers de milions. A més, el resultat és impossible de mesurar amb mitjans macroscòpics ordinaris, com balances o voltímetres.

Les dues magnituds, doncs, tenen dominis operatius diferents, però estan relacionades, ja que la natura conté entitats elementals. La constant d'Avogadro és la constant que relaciona els dos nivells. És una constant de la natura? Des del punt de vista metrològic, només ens interessa la constància en el temps i, aleshores, la resposta és sí. Però, és una constant que ens diu alguna cosa sobre la natura? També, perquè ens parla de quants àtoms ha de tenir un sistema capaç de raonar científicament.

Tenir la diferència entre constant d'Avogadro i el nombre d'Avogadro és important, no només per a mantenir la separació entre les dues magnituds, nombre d'entitats i quantitat de substància, sinó també per a prendre compte d'una certa arbitrarietat en la tria de la unitat. El mol és arbitrari en la mateixa mesura que ho és el gram. Per això, alguns usuaris de les unitats tradicionals del sistema anglosaxó d'unitats van introduir el pound-mole, equivalent a 453,59237 mol, de manera que sigui el nombre d'entitats elementals en 12 lliures, 12 lb, de carboni 12. Evidentment, això implica una diferència en el valor numèric del nombre d'entitats en la unitat pound-mole, però no en la constant d'Avogadro. La constant d'Avogadro és $6,022\,140\,76 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$, i es manté sense canvis com $6,022\,140\,76 \times 453,59237 \times 10^{23} \text{ pound-mole}^{-1}$.

És significatiu que qui planteja aquests problemes no els planteja també en el cas de la càrrega elèctrica. Des del 2019, el valor de la càrrega elèctrica elemental, e , està fixat en $1,602\,176\,634 \times 10^{-19} \text{ C}$ i, doncs, el coulomb queda definit com: «la càrrega d'un determinat nombre de càrregues elementals». De manera que la càrrega elèctrica queda definida com «la suma de càrregues elementals (discreta), però per als valors grans s'obté de manera operativa com a magnitud contínua». De fet, com que ningú no hi veu problema, ni tan sols donem noms diferents a la magnitud discreta i a la contínua i «càrrega elèctrica» ens serveix tant per comptar, la d'un electró, la de dos electrons, per exemple quan treballem amb ions, com per quan la mesurem amb un amperímetre i un cronòmetre, o mitjançant la constant de Faraday, o per qualsevol altre mitjà macroscòpic.

En el tractament precedent s'ha posat de manifest una altra característica del tractament metrològic dels nombres. Els metròlegs parlen de *magnituds contínues*, amb nombres reals, perquè hi apliquen tot l'aparell de l'anàlisi matemàtica, però sempre assignen a les mesures nombres racionals, densos, però comptables, a causa de la resolució de mesura, sempre finita.

Referències

- [1] EINSTEIN, A. «Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen». *Annalen der Physik*, vol. 322, núm. 8 (1905), 549-560. [en línia]. <https://myweb.rz.uni-augsburg.de/~eckern/adp/history/einstein-papers/1905_17_549-560.pdf> [1 març 2026].
- [2] PERRIN, J. «Mouvement brownien et réalité moléculaire». *Annales de Chimie et de Physique* (1909).